Cursos Livre de Música: Educação Musical, Estrutura, Harmonia, Percepção, História da Música e Filosofia Musical.

Técnica Vocal com praticas de solfejos.
Pratica Instrumental: Cordas, Madeiras, Metais e Percussão (Solo e Conjuntos)
Professor: Elizeu Monteiro de Oliveira-
Fone: 3841-2361 ou 981364821

MusicArTecnologia

FILOSOFIA – LÓGICA- ESTUDOS

O homem, que queria conhecer o mundo, percebe diante de si esse outro objeto de conhecimento: o próprio pensamento por meio do qual pretende conhecer o mundo.

31/7/2016

FILOSOFIA – LÓGICA- ESTUDOS

A Lógica como Reflexão

O pensamento humano busca compreender o mundo ao seu redor. Esse esforço, que no ser humano é natural e abrangente, é o que constitui sua especificidade como forma de vida (eis o que está por trás da fórmula clássica, *"o homem é um animal dotado de razão"*). Não se trata de tarefa simples: o mundo apresenta uma complexidade aparentemente infinita. É preciso organizá-la, sistematizá-la, fixá-la e transformar o múltiplo contato com o mundo em uma ciência do mundo.

No momento, porém, em que o pensamento embrenha-se nessa tarefa, e constrói os princípios de uma ciência qualquer – seja ela simples ou complexa, mas que tenha a pretensão de constituir um conhecimento do mundo – ele ganha, ao mesmo tempo, um novo e estranho objeto de conhecimento: ele mesmo, o pensamento. O homem, que queria conhecer o mundo, percebe diante de si esse outro objeto de conhecimento: o próprio pensamento por meio do qual pretende conhecer o mundo. Com essa indagação sobre a estrutura da atividade cognitiva, com essa atividade que é essencialmente reflexiva – desejo de conhecer o conhecimento, e de pensar o pensamento –, nasce o estudo da lógica.

Pensamento, Mundo e Linguagem

O que é o pensamento?

Estamos aqui, novamente, diante de uma pergunta do tipo "o que é?"; e, mais uma vez, não poderemos lhe dar uma resposta precisa.

Em princípio, o pensamento é algo com que todo homem está, em seu íntimo, diretamente familiarizado. Mas, se pudéssemos adentrar a alma (ou a mente, ou o cérebro...) de outras pessoas, esperaríamos encontrar ali o mesmo tipo de pensamento que encontramos em nós. Supomos que todas as outras pessoas, justamente porque são pessoas, pensam, muito embora só tenhamos contato direto com o pensamento que é nosso.

Essa evidência íntima do pensamento é tão forte que levou Descartes (1596 – 1650) a colocá-la na base de seu sistema, *"Penso, logo existo"*. Para ele, o pensamento torna-se uma das substâncias do mundo, *res cogito-substância* pensante (ao lado da extensão, res extensa: que possui corpo, matéria), e serve mesmo como critério de identidade do indivíduo. (No nosso exemplo, não poderíamos adentrar a alma de outra pessoa, para lá encontrar pensamentos, ao mesmo tempo em que mantemos nossa identidade. Os pensamentos são o que essa outra pessoa tem de mais íntimo, inacessível a nós: no momento em que tivéssemos seus pensamentos, já não seríamos nós mesmos. Seríamos essa outra pessoa.)

Muito antes disso, porém, Platão (428-347 a.C) já propusera definir o pensamento como um "discurso silencioso da alma" (essa passagem encontra-se no capítulo 47 do livro O Sofista, diálogo que é um dos mais importantes textos da história da Lógica; falaremos um pouco mais a respeito dele em aulas futuras). Essa definição deve chamar nossa atenção porque nela se anunciam alguns dos principais problemas com que a Lógica terá de lidar. Mais especificamente, Platão aponta aqui para alguma forma de relação profunda, quase uma identidade, entre pensamento e linguagem.

De fato, qual a estrutura do nosso pensamento?

É a mesma estrutura de nossa linguagem, a linguagem que usamos (aparentemente) para expressá-lo?

É possível pensar sem palavras?

Do pensamento à linguagem

O pensamento, seja ele definido da maneira que for, parece ser algo recôndito, que se esconde no íntimo de cada um. Pode-se, por exemplo, encarar o pensamento (em consonância com certas teorias da ciência contemporânea), como um conjunto de processos eletroquímicos ocorridos no cérebro. Isso explicaria, no entanto, aquilo que, para cada um de nós, é o seu próprio pensamento? Esse conjunto de impulsos elétricos seria igual ao conteúdo intrínseco daquilo que nos passa pela cabeça? De maneira análoga, a dor que sentimos pode ser explicada pela neurociência; mas pode ela ser reduzida à constatação de que certo nervo emitiu certo tipo de sinal elétrico?

No início do século XX, o filósofo Edmund Husserl (1859 – 1938), ao defender uma fenomenologia imanente da consciência, viria a colocar essa mesma questão de maneira interessante. Segundo ele, por exemplo, pode-se explicar a um surdo tudo o que é música: sua natureza como fenômeno físico-acústico e sua estrutura interna como arte; esse surdo pode compreender tudo e até mesmo compor uma música; mas escutá-la – saber o que é música – ele não vai.

O pensamento, como se vê, é algo fugidio, como se escorregasse nas mãos.

A linguagem, ao contrário, é essencialmente pública. Ela é a forma como cada um expressa seu pensamento, e que fica acessível a todas as outras pessoas. Não posso saber se meu pensamento é igual ao seu, mas podemos falar a mesma língua. Não posso saber se estamos pensando a mesma coisa, mas podemos comparar nossas afirmações sobre determinado tema, discuti-lo e, eventualmente até concordar sobre certas afirmações.

Pensamento, linguagem e realidade

Temos diante de nós, assim, dois fenômenos: um, o pensamento, aparentemente íntimo e inacessível. O outro, a linguagem, essencialmente pública. É possível examinar e estudar a relação entre ambos. O pensamento molda a linguagem, ou a linguagem molda o pensamento? Os dois compartilham exatamente a mesma forma, ou parte apenas de sua forma?

Em que sentido?

Além dessa primeira série de indagações, porém, é possível – e bastante natural – passar a uma segunda investigação. Pode-se examinar a relação que há (ou pode haver) entre, de um lado, o pensamento/linguagem e, do outro, a realidade que ambos buscam descrever. Afinal, começamos nossa exposição a respeito do pensamento lógico ao constatar que, em um primeiro momento, o pensamento busca conhecer o mundo – e que é a partir daí que se dá a necessidade de voltar-se, de refletir sobre o próprio "eu". De certa maneira, podemos dizer que o pensamento reflete sobre si mesmo justamente porque deseja conhecer o mundo. Mais precisamente, porque deseja saber se é um instrumento legítimo para esse conhecimento; se é capaz de produzir uma imagem (verdadeira) do mundo; se é capaz de reproduzir suas formas; e também porque quer saber como, afinal de contas, tudo isso é possível.

Chegamos, assim, a um ponto crucial de nossa análise, cuja importância os gregos perceberam com agudeza. Para que pensamento e linguagem possam ser instrumentos de conhecimento do mundo, deve estabelecer-se entre os três alguma espécie de relação. Mais ainda: para que essa relação seja possível e produza os resultados esperados, ou seja, para que pensamento e linguagem possam descrever (corretamente) o mundo, deve haver entre os três alguma espécie de forma compartilhada, que torna possível essa descrição. Trata-se, ao menos, de uma esperança bastante razoável.

Examinar essa relação será como veremos, o papel da Lógica.

A Lógica entre Psicologia, Ontologia e Linguística.

Todos nós sabemos o que é o pensamento, e acreditamos possuir alguma coisa, no nosso íntimo, que seja pensamento e todos nós usamos uma linguagem. É justamente na posse desses três elementos – realidade, pensamento e linguagem – como elementos primitivos de nossa *análise ou investigação* (não de nosso mundo, de nossa ciência ou teoria, pois isso seria já comprometer o resultado da análise/investigação), que poderemos discutir a relação entre eles – e, eventualmente, até mesmo concluir por sua redução uns aos outros.

Três estudos diferentes

Ao considerarmos o mundo, ou a realidade, estamos na esfera tradicional da ontologia: a ciência, como propôs Aristóteles (384–322 a.C) em sua *Metafísica*, do "ser enquanto tal". Uma investigação ontológica, assim, busca descobrir a estrutura do ser, visto como substância do mundo.

Se nos detemos a considerar o pensamento, por outro lado, estamos diante de uma investigação psicológica. E "psicologia", aqui, é um termo que deve ser entendido da maneira mais ampla possível: como o estudo, em geral, da faculdade cognitiva humana. Como o estudo, em outras palavras, dos processos que, no homem, correspondem à sua capacidade de conhecer o mundo (ou de interagir com o mundo da maneira como interage, com certa pretensão, isto é, de conhecimento).

Finalmente, se olharmos para a linguagem, adentramos a esfera dos estudos linguísticos. Trata-se de estabelecer as formas da ou das linguagens, sua organização, seus mecanismos.

A lógica como relação

Cabe, agora, perguntar: E a esfera Lógica?

O estudo lógico, pelo menos do ponto de vista que temos tentado abordar até agora, não se confunde nem com a ontologia, nem com a psicologia, nem com a linguística. É bem verdade que, ao longo da história, a lógica foi colocada, em diferentes momentos, em relação bastante estreita com cada uma dessas três outras esferas. Além disso, na medida em que a ontologia veio a ser considerada, cada vez mais, como um estudo bastante problemático, e não raro teve sua legitimidade negada como área própria do saber (principalmente em períodos recentes da história da Filosofia), não faltam tentativas de suprimir a referência ontológica das discussões Lógicas. Nesse sentido, a Lógica chegou a ser reduzida (ser considerada como equivalente) tanto à esfera psicológica como à esfera linguística.

Essas duas reduções, na verdade são, em princípio, perfeitamente defensáveis: considerar a lógica como estudo da estrutura do pensamento (das “leis” do pensamento), ou como estudo da estrutura da linguagem.

A redução psicológica esteve amplamente difundida no século XIX, principalmente devido ao trabalho de John Stuart Mill; contudo ela foi amplamente refutada a partir dos trabalhos de Frege e Husserl, no final do século XIX e início do século XX. Já a redução da Lógica à linguagem foi bastante defendida na primeira metade do século XX. Essa posição, embora se tenha deparado com dificuldades que a fizeram mais de uma vez mudar de rumo, continua bastante viva ainda hoje, sob diferentes formas.

Mais uma vez, no entanto, a defesa de uma ou outra posição, por mais correta que se mostre, só pode ser o resultado de um percurso. Ela tem de ser argumentada e defendida, e não assumida, desde o início, como dada.

O estudo da Lógica caracteriza-se, em um primeiro momento, justamente por transitar entre as três esferas mencionadas. Pois quando o pensamento reflete sobre si mesmo, é precisamente para examinar sua capacidade de traduzir um conhecimento do mundo, conhecimento esse expresso por meio de linguagem. Considera, portanto, sua própria natureza, em relação com a natureza do mundo e da linguagem. Desloca-se em meio a essas esferas, examinando a relação entre elas.

Lógica e Epistemologia

A lógica como parte da teoria do conhecimento

Quando, em nossa primeira aula, começamos a caracterizar a lógica como uma reflexão do pensamento sobre si mesmo, ou do conhecimento sobre si mesmo, uma objeção poderia ter sido levantada: a de que tal caracterização é excessivamente ampla, e ameaça englobar dentro de si toda a teoria do conhecimento – ou mesmo toda a Filosofia. Pois a Filosofia pode ser vista, em seu conjunto, como aquela especial postura intelectual que, ao abandonar a atitude natural e ingênua, passa a ver no próprio conhecimento, em suas diferentes formas e manifestações, um fenômeno a ser explicado, e um problema a ser resolvido.

Essa objeção é, em certa medida, justificada. Desde o começo apontávamos para esse fato, ao insistir na menção do *conhecimento* como instância problemática. É que ainda não estávamos em condições de especificar, com um pouco mais de acuidade, o nosso tema. De maneira geral, a busca por uma explicação para o conhecimento, tomada em sentido amplo, constitui uma investigação ampla, que exige uma observação maior. Assim, buscaremos agora refinar um pouco o intrincado feixe de questões aí envolvidas, para buscar, dentro dele, distinguir o estudo lógico.

Devemos, portanto, perguntar: Qual a especificidade do estudo lógico?

O que o distingue do plexo mais amplo de considerações gnoseológicas. .Antes de abordar propriamente essas questões, é interessante apontar para a dificuldade do problema que temos em mãos, ou seja, para o caráter?

Nada trivial das distinções que tentaremos traçar. Não se trata de uma delimitação fácil de assinalar, este fato é comprovado ao longo da história da filosofia, essa fronteira deslocou-se frequentemente, colocando dentro do território lógico porções maiores ou menores do conjunto de estudo sobre o conhecimento, especialmente no que tange a relação sujeito – objeto indagações sobre o conhecimento. Não foi incomum até mesmo que se borrassem as distinções devidas, para se considerar a lógica como área total dessa investigação.

Indagações lógicas e epistemológicas

Quando se considera o conhecimento e as questões que ele suscita, algumas distinções podem ser traçadas. Uma linha bastante natural de indagação é: Como se obtém conhecimento? Por que meios, e com quais métodos? O que se deve fazer para adquirir conhecimento, e para garantir que esse conhecimento seja seguro, ou ao menos ter uma expectativa razoável, talvez legítima, de que ele assim seja?

Todo esse tipo de questões é tema daquilo que se costuma chamar, em uma terminologia atual, de “epistemologia”. A epistemologia, portanto, é aquela particular maneira de encarar o problema gnoseológico que surge ao se perguntar pela origem do conhecimento e pela possibilidade de certeza quanto a ele. Ao se investigar a metodologia adequada à sua obtenção e questões conexas a essas.

O estudo lógico adota um ponto de vista diferente. Já vimos, em aula anterior, que ele se caracteriza – ao menos em um primeiro momento – por transitar entre a esfera psicológica e linguística e a esfera ontológica: a Lógica estuda a relação que pode ou deve haver entre a esfera do ser, e a linguagem ou pensamento, que buscam descrevê-lo.

Isso significa que as perguntas típicas da lógica serão: como é possível dizer o ser (e o não ser)? Em outras palavras: como é possível dizer que algo é, ou que não é? As questões, aqui, multiplicam-se: como acontece que um signo (uma palavra da linguagem ou um conceito do pensamento) possa referir-se a algo fora de si, a um elemento da realidade? E como acontece que um conjunto de signos (sentenças ou pensamentos) possa referir-se a porções da realidade, isto é, a fatos e acontecimentos?

Ao propor indagações como essas, além disso, o estudo de tipo lógico apresenta ainda outra particularidade: ele concentra sua atenção sobre questões estruturais. Que tipo de estrutura deve ter o pensamento, ou a linguagem, para que possa articular de maneira válida seus signos? Que tipo de estrutura permite encadear proposições e enunciados de maneira a refletir adequadamente a ordem do mundo, para assim poder captá-la? Que tipo de relação deve organizar essas proposições e enunciados entre si, e em seu contato com o mundo?

Todas essas indagações, como se vê, volta-se a examinar, sob alguma perspectiva ou de algum modo, a possibilidade de uma relação objetiva entre aquilo que expressa o conhecimento, ou que é veículo de conhecimento, e o objeto que se pretende conhecer. Ou entre a estrutura/forma daquilo que corporifica o conhecimento, e a estrutura/forma do objeto que se pretende conhecer.

Um acesso à estrutura do ser

Esse particular viés sob o qual a Lógica tenta enfrentar o problema mais amplo do conhecimento permite compreender um pouco melhor o projeto filosófico que ela representa.

Ao perguntar pelo modo como são instituídas as relações que constituem o conhecimento, o estudo lógico permite um duplo movimento. Suponhamos que certo conhecimento tenha A como objeto; e suponhamos que B seja um discurso a respeito de A (B é nossa forma de acesso, portanto a A, portanto, não é A). De alguma maneira, que cumpre à Lógica investigar, o discurso B tenta representar A (o que pode acontecer correta ou incorretamente).

Para que isso aconteça, porém, é necessário que B compartilhe com A algumas formas; é necessário que B apresente as mesmas possibilidades que A; eis o que significa dizer, como fizemos acima, que o discurso (linguagem ou pensamento) deve refletir, deve reproduzir, a ordem daquilo a respeito do qual ele é discurso.

Para compreender a relevância do que está em jogo, podemos supor que, em princípio, o tema do discurso (A) seja a própria realidade. Como dissemos em nossa primeira aula, o conhecimento, ao menos em um primeiro momento, volta-se para o mundo. As ciências são ciências a respeito do mundo. O objeto proposto para o conhecimento, em outras palavras, é a esfera do ser.

Assim, a estrutura do discurso (B) sobre a realidade (A) deverá compartilhar, ao menos em certa medida, a forma da realidade; deverá poder expressar as mesmas possibilidades que são as possibilidades da realidade.

Por um lado, isso significa que a forma do discurso, para poder instituir-se como discurso, deverá refletir certas propriedades do ser; temos aqui, portanto, uma maneira de encarar a relação necessária entre a realidade A e o discurso

B que vai na direção de A para B (a esfera do ser, com sua estrutura, *determina* a estrutura que deve ter o discurso B).

Essa mesma relação entre A e B, porém, pode ser vista por seu outro lado. Como o discurso B é nossa maneira de acesso à realidade A, ao supor algum tipo de identidade entre a estrutura de B e de A, se ganha acesso à estrutura de A. Em outras palavras, ao considerar a maneira de dizer o ser, de instituir um discurso sobre o ser, podemos esperar penetrar a estrutura do próprio ser. Aqui, a relação entre A e B é pensada na direção de B para A (o discurso B, com sua estrutura, *revela* a estrutura do ser).

A Organização Dedutiva do Conhecimento.

O estudo lógico busca verificar e explicar a possibilidade de uma descrição da realidade. Para ter conhecimento, é necessário, antes de mais nada, produzir uma imagem do mundo, ou seja, tentar descrevê-lo. Somente uma descrição do mundo, nesse sentido, pode pretender ser um conhecimento *teórico* do mundo (por oposição às esferas práticas de conhecimento, que se ocupam da ação do homem sobre o mundo). Uma ciência, então, revela-se pelas afirmações que faz a respeito do mundo. Mas que tipo de afirmações constituem uma ciência?

A insuficiência dos enunciados verdadeiros

Em princípio, temos algum conhecimento quando conseguimos fazer afirmações verdadeiras a respeito do mundo. Deixemos de lado, por enquanto, o que significam "verdade" ou "falsidade". Vamos assumir, momentaneamente, que sabemos o que significa uma afirmação ser "verdadeira". Sabemos também que, para possuir uma ciência, precisamos de um conjunto de afirmações verdadeiras a respeito do mundo. Mas será que isso basta?

Não basta. Um conjunto de afirmações (que passaremos também a chamar de proposições ou enunciados), ainda que verdadeiras, não constitui uma ciência. Isoladamente considerados, em desordem, tais enunciados pouco representam. Para que componham uma ciência, eles devem manter alguma relação entre si, obedecer a alguma espécie de lei interna, que os una e estruture segundo uma lógica que possa ser assimilada e manipulada.

Alguns enunciados devem servir de fundamento a outros, que por sua vez devem permitir que outros tantos sejam deduzidos.

A razão profunda para isso foi percebida, já no século XVII, por Leibniz (1646 – 1716). Foi ele quem observou, de maneira clara, que uma explicação tem de ser mais simples do que o objeto a ser explicado em outras palavras, que toda teoria deve condensar informação sobre seu objeto. De fato, ao tentar desenvolver alguma forma de ciência, pretendemos que ela coordene suas afirmações em um sistema o mais ordenado possível que ela possa, a partir de um número relativamente pequeno de proposições acerca de seus conceitos fundamentais, aplicar-se a um grande número de casos e situações. Eis o que permite pensar em uma teoria como uma explicação do mundo. Essa simplicidade ou condensação é obtida por meio de uma lógica que contenha mecanismos dedutivos.

Estruturas dedutivas

Como já observamos acima, um conjunto de enunciados, vistos cada um isoladamente, não consegue alçar-se à condição de ciência. Descrevem fatos estáticos no mundo, ao passo que uma ciência busca alcançar algo mais profundo: busca descrever certa regularidade, certas conexões que regem a realidade. Para se configurar uma ciência, portanto, é necessário que o conjunto de enunciados esteja organizado em uma estrutura, que nós chamamos de "dedutiva".

Em uma estrutura dedutiva, os enunciados encadeiam-se de tal maneira que é possível passar de uns a outros, seguindo certa ordem fixa. Assim, a partir de certos enunciados iniciais, é possível deduzir (também se diz "inferir") logicamente novos enunciados. Os primeiros servem de fundamento aos segundos. Essa ordenação, essa teia em que os enunciados estão amarrados, possui certa rigidez essencial: os caminhos percorridos são sempre os mesmos, e devem poder ser reproduzidos; eles estão estabelecidos de maneira objetiva, por meio de certas regras.

Esse tipo de organização dos enunciados de certa teoria traz consigo muitas vantagens. Em especial, ela é o que permite, *do ponto de vista lógico,* a elaboração de um sistema de conhecimento com o desejado grau de generalidade. Devido a essa ordenação dos enunciados, de fato, é possível condensar em algumas poucas premissas – em um número *finito* de premissas – um amplo domínio (possivelmente infinito) de resultados e casos particulares.

Pense-se, por exemplo, no célebre exemplo fornecido já na antiguidade por Euclides. Em seus *Elementos*, obra que serviu de modelo para o método dedutivo até o século XIX, ele pretendeu compendiar toda a geometria de seu tempo. Para isso, bastaram-lhe (ou assim ele acreditou) cinco postulados iniciais, a partir dos quais julgou poder deduzir (por meio da Lógica) todos os (infinitos) teoremas de sua ciência. É um procedimento de tipo lógico, portanto, que possibilita que uma ciência com potencialmente infinitos teoremas seja condensada em alguns poucos enunciados iniciais: pois as cadeias de dedução características da Lógica, por meio das quais se conectam os diferentes enunciados, permitirão que se caminhe através deles, passando de uns a outros. Essa função da Lógica é tão fundamental e, ao mesmo tempo, tão visível e tão presente por toda parte que, frequentemente, costuma-se definir a Lógica como o estudo dos procedimentos de dedução (ou, como às vezes se acrescenta, da "dedução válida"). Essa visão considera que todos os outros problemas tratados pela Lógica, como o estudo dos termos (conceitos) e dos enunciados (proposições), são etapas preliminares para o estudo da dedução (argumentação): examinar a estrutura dedutiva do discurso, a maneira como os enunciados encadeiam-se segundo relações de inferência, seria o objetivo final do estudo lógico.

A Validade da Lógica

Uma lógica adequada

Dissemos que o estudo lógico busca organizar o conhecimento – o conjunto de enunciados das diversas ciências – segundo uma estrutura dedutiva, que permita a passagem de certos enunciados a outros. No entanto, devemos perguntar: que tipo de estrutura dedutiva deseja-se estabelecer ou encontrar? Será que qualquer estrutura serve, bastando para isso que forneça uma relação objetiva entre diferentes enunciados? Visto de outra maneira: a Lógica estabelece certa conexão (dedutiva) entre enunciados, de maneira que se possa passar de um enunciado a outro. Mas que tipo de passagem é essa?

Está claro que nem todo sistema dedutivo, ainda que seja capaz de estabelecer uma relação entre enunciados, serve aos objetivos do estudo lógico. A lógica busca obter um sistema de deduções *corretas* ou *válidas*.

É fácil ver o que se passa. A lógica é chamada a organizar, a estruturar, o conhecimento. A estrutura dedutiva buscada pela lógica, portanto, deve revelar-se adequada aos propósitos do conhecimento.

Colocamos, assim, a questão em sua forma mais ampla e geral: *um sistema de inferências lógicas (um sistema lógico em geral) deve ser um sistema adequado para a ciência.* Por sua abrangência, acreditamos que essa seja a melhor fórmula para explicar o que está em jogo quando se estuda a estrutura dedutiva do discurso. É claro, porém, que esse tema pode receber (como historicamente recebeu) diversos tratamentos mais específicos.

O ser como régua para o discurso

O mais natural deles é supor que a correção da Lógica deva ser medida pela esfera do ser. Nessa maneira de encarar a questão, o conhecimento é um conhecimento a respeito do ser; e a estrutura do discurso, portanto, deve refletir a estrutura interna do ser. Deve reproduzi-la, deve corresponde-la.

E como se manifesta, do ponto de vista dedutivo, essa correspondência?

Manifesta-se pela exigência de que a estrutura inferencial do discurso preserve a verdade dos enunciados. Em outras palavras, uma dedução lógica deve permitir a passagem de enunciados verdadeiros (tal como medidos pelo ser) a outros enunciados verdadeiros: se as premissas são verdadeiras, então todos os enunciados logicamente deduzidos a partir de tais premissas também devem ser verdadeiros.

Não é difícil perceber que, para poder funcionar, uma posição desse tipo necessita de uma definição para o conceito de "verdade" que remeta a uma esfera ontológica incondicionada (verdade como correspondência com o ser). Se o ser deve funcionar como parâmetro para os conceitos lógicos – verdade de enunciados, validade de deduções etc. –, então esse parâmetro não pode estar condicionado pelo próprio estudo formal da lógica; deve ser anterior a ele e independente dele.

Revelar o Ser

O ser revelado pelo discurso

Ele consiste em inverter a direção pela qual se examina a relação entre ser e discurso. Segundo essa perspectiva, a estrutura interna do ser deve ser compreendida por meio da estrutura do discurso sobre o ser – na medida, justamente, em que essa última corresponde à primeira. Essa correspondência, por sua vez, está garantida porque ocorre no plano mais fundamental possível, naquele plano estrutural básico que garante o próprio funcionamento do discurso em sua relação com a realidade.

Esse caminho está implícito no projeto aristotélico, que combina intimamente duas visões que, bem examinadas, cumpre distinguir: de um lado, a visão inicial de que o ser deve servir de régua para medir a validade de um discurso sobre o ser; de outro, a necessidade de revelar a estrutura do ser *por meio* da estrutura do discurso. Essas duas tendências podem ser conciliadas precisamente porque se apoiam em uma mesma concepção da ontologia em sua relação com o discurso. Mais especificamente, ambas supõe uma esfera ontológica dotada de estrutura própria, anterior e independente a quaisquer atividades cognitivas e ambas supões uma correspondência entre essa estrutura ontológica, como dado prévio, e a estrutura do discurso que a ela consegue se referir.

A objeção a essa visão, porém, continua difícil de superar: por mais básico que se possa imaginar o plano no qual se dá a relação entre o discurso e o ser, nada garante a real correspondência de suas estruturas, e supô-la é arbitrário. Isso não significa, por outro lado, que não seja possível extrair importantes conclusões a partir da estrutura do discurso. Sendo o discurso a atividade fundamental por meio da qual apresentamos o ser – ou, se preferir, a atividade fundamental para a elaboração, conformação e expressão do conhecimento – a análise de sua estrutura permanece como tarefa central da filosofia e o projeto lógico continua a se identificar, em larga medida, com aquela orientação filosófica que busca extrair certas conclusões a partir das considerações da estrutura do discurso.

A Estrutura do Pensamento

A lógica como estrutura da representação

A ideia de que a representação constitui uma mediação necessária entre o ser cognoscente e a realidade – ou antes, que a representação é, para esse ser cognoscente, sua única realidade imediata – foi expressa de maneira tão bela quanto precisa por A. Schopenhauer (1788 – 1860), no trecho que inicia sua obra fundamental:

> " 'O mundo é minha representação': eis uma verdade válida a respeito de todo ser vivo e conhecente, não obstante somente o homem possa levá-la ao seu conhecimento abstrato e refletido: desde que ali tenha chegado, terá adquirido o juízo filosófico. Então, tornar-se-lhe-á claro que não conhece um sol ou uma terra, mas sempre e unicamente um olho que vê um sol, uma mão que sente o contato de uma terra; que o mundo que o cerca só existe como representação (...)." (Schopenhauer, A, *O Mundo como Vontade e Representação* – tradução de Pedro Ferraz do Amaral).

Schopenhauer, que escreveu essas linhas na primeira metade do século XIX, é um filósofo que se insere na tradição kantiana. Antes de Kant (1724 – 1804), Descartes já havia colocado o pensamento no centro de suas considerações.

Ele próprio, porém, não se deteve em considerações do tipo lógico (disciplina que tinha, aliás, em muito baixa conta). A Lógica de Port-Royal, principal tratado lógico produzido diretamente dentro da tradição cartesiana, centra-se justamente sobre a atividade do pensamento: busca fornecer as regras e o método para o pensamento correto. Contudo, ao se deter em toda sorte de considerações, mais pertinentes a outros ramos da filosofia (especificamente à epistemologia) do que à lógica propriamente dita, acabou por ter pouca relevância para o estudo e o desenvolvimento da lógica.

A Lógica como estrutura empírica do pensamento

Podemos apontar uma segunda tendência, bastante diferente da anterior (e, em certa medida, oposta a ela), que busca no pensamento a instância privilegiada para a análise do conhecimento. Se Kant, por meio de um apelo ao que chamava de método transcendental, negava o caráter psicologista de seus resultados, aqui esse caráter se afirma em toda sua plenitude. Não se trata mais de verificar as condições lógicas necessárias a uma estruturação da natureza conforme regras – mais especificamente, conforme às regras (lógicas, reveladas por meio da argumentação transcendental) do entendimento. O pensamento, aqui, é visto como atividade psíquica empiricamente determinável, ou seja, não mais em seu aspecto de idealidade objetivamente válida, mas como fato concreto do mundo natural.

O texto que se pode apontar como modelo para esse tipo de visão, bastante difundida no século XIX, é a obra *Sistema de Lógica*, escrita em 1843 pelo filósofo inglês John Stuart Mill. A idéia central dessa corrente consiste em ver o homem como ser biológico sujeito às leis naturais; assim, também seu pensamento é uma atividade sujeita a certas leis naturais. São essas leis naturais do pensamento, que lhe determinam a estrutura, que passam a ser vistas como o tema de estudo da Lógica. Correspondentemente, as leis lógicas devem ser buscadas, e explicadas, por meio dessas leis naturais do pensamento.

A Estrutura da Linguagem

A lógica da linguagem

A linguagem humana – o manuseio de sistemas simbólicos por parte dos homens – tem uma série de funções. Ela aparece em diferentes contextos, com diferentes objetivos (manifestar sentimentos, pedir ajuda e até, simplesmente, estabelecer contato, como no caso de palavras como "oi" ou "alô"). Entre essas funções, porém, uma parece particularmente relevante para o ponto de vista adotado pela filosofia e pela ciência. Trata-se do uso da linguagem para descrever o mundo, ou seja, para tentar dizer a realidade (e assim, ao mesmo tempo, explicá-la). Por outro lado, toda teoria a respeito do mundo precisa, em algum momento, ser codificada por meio da linguagem.

Do ponto de vista da Filosofia, uma linguagem será vista como qualquer sistema de símbolos (que podemos tomar, sem perda de generalidade, como símbolos escritos) dotado de regras. Essas regras, segundo uma visão bastante predominante na Lógica Simbólica, a partir do século XX, são essencialmente de dois tipos: 1) regras que indicam como combinar os símbolos da maneira correta, de tal modo que certas cadeias de símbolos (as proposições ou enunciados) sejam vistas como significativas (regras de formação) e 2) regras que indicam como essas cadeias de símbolo articulam-se entre si, para formar uma estrutura dedutiva (regras de dedução).

Uma linguagem deve ter (ao menos idealmente) uma estrutura dedutiva bem estabelecida; é necessário examinar detalhadamente essa estrutura, para dominá-la da melhor maneira possível. Por isso mesmo, considera-se como tarefa essencial da Lógica a análise dos recursos dedutivos da linguagem: o estabelecimento das (cadeias de) inferências permissíveis e o exame das relações de dependência entre as diversas proposições (quais podem ser deduzidas a partir de outras, quais são independentes, contraditórias etc.).

Essa preocupação com a estrutura dedutiva da linguagem – ou seja, com seu conjunto de regras dedutivas – é perfeitamente justificável. Contudo, não se deve negligenciar a importância das regras de tipo 1, as regras de formação de uma linguagem. Um importante filósofo da matemática do século XX, Imre Lakatos, já chamava a atenção para esse equívoco, bastante comum entre estudiosos de Lógica Simbólica. Alertava, também, para suas consequências: muitas vezes, ao se discutir um sistema linguístico, muitos de seus pressupostos essenciais não conseguem vir à luz justamente porque permanecem “escondidos” sob a condição de regras de formação.

Essa tendência, muito comum no auge dos complexos e importantíssimos debates havidos em torno da Lógica Simbólica no século passado, mostra como é importante – mesmo quando se tem em mãos um instrumental técnico e matemático muito superior àquele de que se dispunha em séculos anteriores – manter em vista o projeto filosófico historicamente proposto pelo estudo da Lógica. De fato, as regras de formação de uma linguagem, ao estabelecer como os símbolos *podem* se combinar, determinam quais enunciados podem ser formulados na linguagem, ou seja, qual o limite da linguagem (quais afirmações ela é capaz de fazer). Anterior a qualquer discussão acerca da maneira como os enunciados se articulam entre si, portanto, aparece aí uma tarefa lógica essencial: o exame de como a linguagem diz (ou pode dizer) o mundo.

A generalidade da lógica

Devemos ainda chamar a atenção para uma questão bastante interessante que se evidencia quando a Lógica é tratada (principalmente) em seu aspecto linguístico: a questão da generalidade dos sistemas lógicos.

Quando tratada pelo viés ontológico ou cognitivo-psicológico, é comum se pensar a Lógica como um fenômeno formalmente unitário. Em outras palavras, é comum acreditar que existe uma única estrutura lógico-formal válida, de aplicação absolutamente geral e irrestrita. De fato, ao considerarmos que o discurso é capaz de espelhar a estrutura ontológica do mundo, e que a Lógica deve revelar essa estrutura, acreditamos que isso é possível, justamente, porque o estudo lógico se locomove no plano estrutural mais básico e profundo possível. Assim, a Lógica deve ocupar aqueles aspectos aplicáveis a toda a esfera do ser e a todo o discurso sobre o ser – o que significa, por sua vez, que ela é única para todo ser.

Se as considerações se deslocam para a esfera psicológica, algo semelhante tende a ocorrer. Afinal, também a razão ou o pensamento humano podem ser vistos como fenômenos essencialmente unitários: a tarefa da Lógica será buscar aquelas leis mais gerais da cognição e do pensamento, aplicáveis em todos os casos, independentemente de seu objeto. Eis o que está por trás da afirmação, mais do que tradicional, de que a Lógica se ocupa de leis gerais – sejam do ser ou do pensamento.

O Nascimento da Lógica com Aristóteles

Digno de especial consideração, é o trabalho de Platão. Em mais de um de seus diálogos (dentre os quais sobressai, pela profundidade e relevância dos resultados atingidos, O *Sofista*, como teremos oportunidade de ver mais adiante), o fundador da Academia explicita problemas de natureza essencialmente lógica, oferecendo para eles algumas importantes soluções, muitas das quais depois aproveitadas por Aristóteles. São essencialmente três os temas lógicos presentes na obra de Platão: 1) O que são o falso e o verdadeiro e como eles podem ser ditos; 2) Que tipo de relação constitui a inferência válida; 3) Qual a natureza da definição.

No conjunto dos escritos platônicos, porém, essas questões aparecem de maneira esparsa, sempre em função de outras preocupações. Sem a intenção de que elas poderiam (ou deveriam) constituir uma doutrina específica, digna de sistematização.

A sistematização aristotélica

Foi o mestre de Estagira quem primeiro percebeu a importância de organizar certo corpo de doutrina, hoje chamada de “Lógica aristotélica”, com as características que veremos mais à frente. De fato, ele produziu um conjunto de escritos que giram ao redor de temas especificamente lógicos: escritos, vale dizer, que buscam explicitar e desenvolver os pressupostos, mecanismos e possibilidades de um discurso (*logos*) sobre o ser.

O *Organon* Aristotélico

Organon, nome sob o qual foram reunidos os escritos lógicos de Aristóteles. Ele se compõe, como já observamos, de cinco livros, sendo o último deles (segundo a ordem em que foram organizados, mas não em que foram escritos) acompanhado de um apêndice. Os livros são: *Categorias*, *Da Interpretação*, *Primeiros Analíticos* (ou *Analíticos Anteriores*), *Segundos Analíticos* (ou Analíticos Posteriores) e *Tópicos* (acompanhado de um apêndice, os *Elencos Sofísticos*).

Embora não se possa ter certeza quanto à ordem em que foram escritos, os estudos históricos e sistemáticos indicam que ela teria sido a seguinte: Categorias, Tópicos e Elencos Sofísticos (textos da primeira fase, sendo que as Categorias parecem ter sido – ao menos seus oito primeiros capítulos – o primeiro escrito de Aristóteles); *Da interpretação*; *Primeiros Analíticos* e *Segundos Analíticos* (escritos lógicos mais maduros de Aristóteles).

A primeira ordenação é aquela em que os escritos lógicos costumam sempre aparecer, desde que o *Organon* foi compilado. A segunda é fruto de uma reconstituição histórica e por isso comporta certo grau de incerteza.

Qual a importância de cada uma?

A ordenação cronológica, que se buscou depois recuperar, é importante na medida em que permite observar o desenvolvimento do pensamento de Aristóteles e a maneira como os temas lógicos foram surgindo e se articulando em sua obra. Em uma doutrina que, por sua própria novidade, não nasceu de maneira planejada e sistemática, esse tipo de consideração mostra-se, muitas vezes, bastante revelador acerca do contexto filosófico em que apareciam as questões lógicas.

A ordem adotada classicamente no *Organon*, porém, está longe de ser arbitrária. Muito pelo contrário: estabelecida pelos discípulos da escola aristotélica, ela obedece a um caráter sistemático bastante claro e revela um elevado grau de consciência em relação à natureza lógica como disciplina filosófica particular. Essa ordenação do *Organon* e os critérios que a orientam, desse modo, serão de grande importância para a história da nossa matéria.

A organização dos livros do *Organon*

Tomemos por base aquela visão da Lógica que vê no estudo da inferência válida sua tarefa principal. Uma inferência é a passagem de um conjunto de enunciados (as premissas de um raciocínio) a outro enunciado, a conclusão que segue dessas premissas. O exemplo clássico desse procedimento é:

Todo homem é mortal (1ª premissa, enunciado ou preposição)

Sócrates é homem, (2ª premissa, enunciado ou preposição)

Logo,Sócrates é mortal. (conclusiva, inferência lógica)

Uma inferência lógica, portanto, é uma relação entre enunciados (também chamados de “proposições”. A respeito dessas distinções, falaremos mais na ocasião oportuna).

Parece claro, portanto, que um estudo da inferência deva ser precedido de um estudo sobre o enunciado, por serem estes as unidades que a compõem.

Do mesmo modo, um estudo do enunciado deve ser precedido de um estudo acerca dos termos que o compõem, como suas unidades básicas, o próprio enunciado.

As Categorias

Esse primeiro livro aristotélico encerra muitas dificuldades interpretativas.

De maneira geral, as *Categorias* contêm uma relação dos dez gêneros do ser ou, como preferem alguns, das dez classes de predicados.

Do ponto de vista lógico, porém, as categorias trazem um importante ensinamento.

Elas mostram que os termos de uma linguagem desempenham papéis fundamentalmente diversos na articulação do discurso significativo.

Mais ainda, elas mostram que esses diferentes papéis são irredutíveis uns aos outros. Em uma frase como "Amanhã pretendo ir ao cinema", podemos substituir a expressão "amanhã" por muitas outras, mas não por quaisquer outras: posso substituir "amanhã", por exemplo, por "hoje", "depois de amanhã" ou "na semana que vem"; mas não por "azul", "três", "maior" etc. Posso substituir a expressão amanhã, em resumo, somente por outra da mesma categoria (no caso, a categoria que Aristóteles chamaria de tempo).

O Significado dos Enunciados

Um nome é sempre um nome de algo: para instituir-se como nome, uma palavra tem de apontar para algo além de si, algo do qual ele é nome. Assim, o nome "Sócrates" aponta para o *homem* Sócrates – ou, como é costume falar, refere-se ao homem Sócrates. Em suma: ser nome é ser nome de algo, é referir-se a *alguma coisa* na realidade.

Em *O Sofista*, Platão mostra que a situação é bem diferente quanto se trata do discurso, ou seja, quando se trata de estabelecer o significado de enunciados, e não de nomes. Os enunciados não apontam para nada na realidade. Para se instituírem como enunciados, eles não necessitam possuir uma referência na realidade, no mesmo sentido em que um nome necessita possuir uma referência. Os enunciados simplesmente combinam elementos da realidade.

O ser, na metafísica aristotélica, é misto (ou composto). Dado um ser, ele participa de vários outros, mas não de todos os outros. Por exemplo: o ser de “Sócrates” participa do ser “filósofo” e do ser “grego”, mas não participa do ser “cantor” nem do ser “anão”. O importante, aqui, é o fato de que, dados dois seres, há sempre duas possibilidades de um em relação ao outro: ou um participa do outro, ou não participa. Surge assim aquilo que chamamos de *bipolaridade*.

A estrutura típica do discurso, nesse sentido, pode ser descrita da seguinte maneira. Um enunciado combina dois nomes: o primeiro nome introduz o tema, e o segundo nome uma determinação desse tema (determinação que pode ser positiva ou negativa, mas é sempre determinação). Como já sabemos, o nome significa transitivamente, ou seja, é nome de algo. Duas possibilidades, portanto, abrem-se no plano *ontológico* (no plano da realidade): ou as coisas significadas pelos nomes participam uma da outra, ou não participam. Essas duas possibilidades são exclusivas (uma exclui a outra: as duas não podem acontecer ao mesmo tempo) e exaustivas (não há uma terceira possibilidade: uma das duas tem de acontecer).

A ideia básica dessa solução, exposta por Aristóteles no capítulo VI de seu *Da Interpretação*, repousa sobre a percepção de que a verdade consiste na correspondência entre a escolha enunciativa (feita no plano lógico) e a maneira como a realidade resolve (ontologicamente) a alternativa aberta pelos nomes que aparecem no enunciado. Além da bipolaridade (duas alternativas possíveis, no plano do discurso e da realidade), portanto, a outra característica importante que podemos apontar aqui é justamente a definição de verdade como correspondência entre ser e discurso.

Podemos acrescentar ainda que as correspondentes opções lógicas e ontológicas *equivalem* uma à outra. De fato, tomemos um enunciado “E” (as aspas, aqui, não podem ser omitidas, pois são elas que indicam que se trata de um enunciado, ou seja, um discurso). O enunciado “E” pode ser verdadeiro (o que indicamos por V(“E”) ou falso (o que indicamos por F(“E”). A situação correspondente no plano ontológico é E (sem aspas). No plano ontológico, então, pode acontecer E ou não-E. A equivalência entre os dois planos, então, pode ser vista assim:

V(“E”) E E V(“E”)

F(“E”) não-E não-E F(“E”)

Essas quatro implicações mostram que o enunciado “E” é verdadeiro se, *e somente se*, ocorre E. por outro lado, o enunciado “E” é falso se, *e somente se,* ocorre não-E, ou seja, não ocorre E. O fato de a implicação verificar-se nos dois sentidos – ou seja: a verdade do enunciado implica o fato, e o fato implica a verdade do enunciado (analogamente para a falsidade do enunciado) – mostra a equivalência que surge entre o plano lógico e ontológico. Uma equivalência, por assim, dizer, entre o enunciado verdadeiro e a realidade.

A Análise do Enunciado e sua Importância.

Do ponto de vista lógico, isso significa que a descrição do ser assume sempre a forma predicativa: para Aristóteles, toda descrição, por mais complexa que seja, pode ser reduzida, quando bem examinada, a uma descrição do tipo “S é P” (S = sujeito; P = predicado). Foi o que vimos, precisamente, ao examinar a teoria aristotélica do enunciado e seu modo de significação, que resulta sempre de uma escolha lógico-enunciativa (com a forma predicativa, de determinação do sujeito por um predicado) feita sobre uma alternativa aberta no plano ontológico.

A Silogística

O que é dedução?

A teoria dos silogismos é uma doutrina da dedução. A dedução, é um procedimento que permite passar de um conjunto de enunciados iniciais, as chamadas premissas do raciocínio, a um novo enunciado que se supõe seguir delas, designado como conclusão.

Qualquer sistema desse tipo, que permita a transição de premissas a conclusões, é um sistema dedutivo.

Nem todo sistema dedutivo, no entanto, são um sistema interessante, ou útil, para a ciência e demais atividades humanas. De um ponto de vista bastante geral, portanto, o que buscamos é um sistema dedutivo que se mostre adequado à constituição do conhecimento, ou seja, que possa servir adequadamente aos objetivos cognitivos do homem. Para Aristóteles, isso significava que um sistema dedutivo deveria ser válido: por meio dele, deveria ser possível passar, a partir de premissas verdadeiras, apenas a conclusões verdadeiras.

Assim, a silogística aristotélica pode ser descrita como uma teoria formal da inferência válida, entendida como aquela inferência que preserva a verdade.

(Na sentença anterior, em vez do termo “inferência”, pode-se usar o termo “dedução”, “argumento” ou “raciocínio”.)

O que é “formal”?

A explicação preliminar que podemos neste momento oferecer parecerá um tanto redundante: formal é aquilo que diz respeito às formas. Para que essa explicação torne-se mais interessante, deveríamos especificar melhor o que é uma “forma”. Isso será feito ao longo das próximas aulas e, principalmente, na última aula desta unidade. Por enquanto, teremos de nos contentar com certa noção intuitiva que todos temos a esse respeito.

Não custa observar, nesse sentido, que um raciocínio formal é aquele que prescinde do conteúdo. No caso dos silogismos, isso significa dizer que eles são esquemas de raciocínio que independem do conteúdo dos enunciados envolvidos. Ao contrário, sua utilidade reside justamente no fato de que eles permitem verificar a validade das conclusões somente por meio do exame da forma dos enunciados assim, eles permitem ao estudioso operar somente com formas.

As Formas Categóricas

Para Aristóteles, a forma básica do enunciado é a forma predicativa: “S é P” (em que S é o sujeito e P o predicado). No entanto, ele percebeu que esse esquema fundamental comporta certas variações muito importantes, que alteram o modo como o sujeito (visto como classe, conforme explicaremos abaixo) é afetado pelo predicado (visto como determinação dessa classe). De um ponto de vista contemporâneo, essas variações dizem respeito à quantificação do sujeito.

As quatro formas categóricas

Em sua teoria dos silogismos, Aristóteles trabalha com quatro variantes da forma predicativa. São as chamadas formas categóricas do enunciado, que correspondem a qualquer enunciado que apresente uma dessas formas. Ele será chamado, então, de “enunciado categórico”. Na apresentação tradicional, ainda mais, as quatro formas categóricas costumam ser indicadas pelas quatro primeiras vogais. Eis a sua lista:

Enunciados categóricos

	forma geral	**exemplo**
Universal Afirmativo:	(A) Todo S é P	Todo homem é mortal
Universal Negativo:	(E) Nenhum S é P	Nenhum homem é mortal
Particular Afirmativo:	(I) Algum S é P	Algum homem é mortal
Particular Negativo:	(O) Algum S não é P	Algum homem não é mortal.

A Interpretação dos termos

Aristóteles perseguia ao elaborar a sua teoria dos silogismos: ele desejava que os esquemas argumentativos ali codificados fossem aplicáveis essencialmente aos casos gerais que compõem uma ciência (por exemplo: “todo animal é mortal”; “todo homem é animal”; logo “todo homem é mortal”).

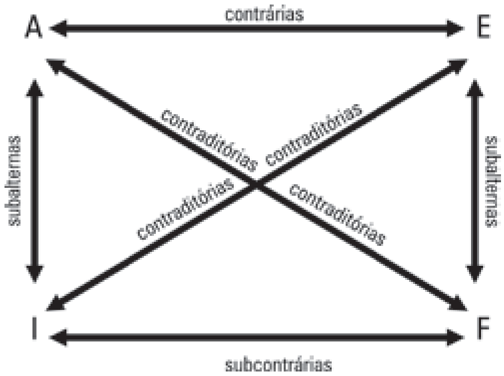
Mas o que fazer, então, com os casos em que o sujeito é singular, como no famoso exemplo em que se diz que “Sócrates é mortal”? Do ponto de vista formal dos silogismos, eles devem ser tratados – na maioria das vezes – da mesma maneira que os enunciados universais afirmativos. Assim, na hora de estruturar um silogismo, dizemos que o enunciado individual “Sócrates é mortal” possui a forma A. De certa maneira, isso corresponde ao caso limite de uma classe composta por um único indivíduo. Intuitivamente, faz sentido: dado que existe somente um indivíduo que é Sócrates, e que esse indivíduo é mortal, é como se tomássemos a “liberdade” de dizer que “todo Sócrates é mortal”.

O quadrado das oposições

O mais famoso esquema mnemônico associado à teoria aristotélica dos silogismos é o chamado “quadrado das oposições”, ou “quadrado lógico”.

Na Idade Média, devido à escassez de pergaminhos e de outros suportes acessíveis para a escrita, tornou-se muito comum elaborar esquemas para ajudar no aprendizado e na memorização dos resultados lógicos (a própria utilização de vogais para indicar as formas categóricas é uma invenção desse período). Além disso, associado a essa abordagem de cunho eminentemente prático, o exame minucioso da Lógica como técnica permitiu aos pensadores medievais atingir um domínio bastante impressionante do formalismo silogístico.

O quadrado das oposições consegue resumir, em uma figura simples e fácil de gravar, um número de características e relações que surgem entre as formas categóricas do enunciado, relevantes para diversas discussões que então se travavam. Em nosso estudo, apenas um número muito reduzido dessas características e relações será levado em conta. Mesmo assim, tanto por sua importância histórica como pelo instrumento que oferece, o quadrado das oposições merece ser conhecido. Ele é dado por essa forma simples:



Onde:
A= universal afirmativa
E= universal negativa
I = particular afirmativa
O= particular negativa

A Distribuição dos Termos

Referência coletiva e referência distributiva

Tomemos os dois enunciados seguintes: “A categoria profissional dos professores de São Paulo é firme em suas convicções” e “A categoria profissional dos professores de São Paulo é extremamente numerosa”. Os dois enunciados têm o mesmo termo como sujeito, mais especificamente, “a categoria profissional dos professores de São Paulo”. Como já sabemos, esse termo refere-se a certa classe de objetos, no caso, a classe de seres humanos que moram em São Paulo e são professores.

No caso, em um dos dois enunciados, o predicado é diferente. Isso é fácil de perceber. O que talvez não seja tão fácil de perceber, porém, é que, no exemplo dado, cada um dos predicados afeta o sujeito de maneira essencialmente diferente. Vejamos como isso acontece.

Quando dizemos que "A categoria profissional dos professores de São Paulo é firme em suas convicções", estamos falando algo que se aplica a cada um dos elementos da classe em questão: em princípio, podemos dizer que cada um dos professores de São Paulo é firme em suas convicções.

O mesmo, porém, não acontece com o outro enunciado. Quando dizemos que "A categoria profissional dos professores de São Paulo é extremamente numerosa", o predicado aqui expresso – "extremamente numeroso" – não se aplica aos elementos da classe em questão, ou seja, a cada professor individualmente considerado: não faz sentido dizer que tal professor é extremamente numeroso. O predicado, nesse caso, aplica-se somente à classe como um todo. É a classe considerada em si mesma que é extremamente numerosa. Nesta segunda situação, dizemos que o predicado aplica-se à classe coletivamente.

Ele se refere à classe como um todo, ou seja, em seu aspecto de coletividade. Na primeira situação, ao contrário, dizemos que o predicado aplica-se à classe distributivamente: ele se distribui pelos membros daquela classe, para aplicar-se a cada um deles.

O Silogismo

Um silogismo categórico – que chamaremos simplesmente de "silogismo" – é um conjunto de três enunciados categóricos, em que dois funcionam como premissa, e o terceiro deve fazer o papel de conclusão. Por exemplo: "todos os lagartos são verdes", "nenhum ser inteligente é verde"; logo "nenhum lagarto é inteligente". Ou "todo brasileiro é ser humano", "todo brasileiro é sul-americano"; logo "todo sul-americano é humano". (Qual desses silogismos é válido? Qual não é?)

De maneira geral, portanto, a validade do silogismo deveria ser verificada por sua adequação à estrutura do ser. Na prática, porém, como isso é feito? Aristóteles, como já sabemos, tinha uma concepção da ordem do ser que pode ser descrita, modernamente, em termos de classes. As duas premissas de um silogismo contêm informações sobre a ordem do ser, ou seja, informações a respeito de como certas classes e seus elementos se organizam. A conclusão, por sua vez, também contém certa informação a respeito do ser e de sua organização em classes.

A conclusão será válida – e, portanto, o silogismo como um todo será válido – se a situação descrita na premissa não permitir nenhuma outra configuração do ser que não aquela descrita pela conclusão. Dito de outra maneira: dada a descrição do ser fornecida pelas premissas, é necessário que ele se organize da maneira descrita na conclusão (não é possível que o ser não se organize dessa maneira). Dito de outra maneira ainda: a descrição fornecida pela conclusão tem de estar plenamente contida na descrição fornecida pelas premissas.

Os termos do silogismo

Dadas as características requeridas do silogismo válido, uma primeira constatação é bastante imediata. Os termos da conclusão têm de ser termos que já apareceram nas premissas; caso contrário, a conclusão não poderia estar contida nas premissas. Por exemplo: se as premissas falam de cachorros, mesas e árvores, não pode haver uma conclusão válida a respeito de mordomos.

Na verdade, um silogismo válido apresenta sempre e somente três termos diferentes. Vejamos como isso acontece. Há dois termos que aparecem na conclusão; são os chamados "termos extremos". (Tradicionalmente, costuma-se designar por "termo menor" o sujeito da conclusão, e por "termo maior" o predicado da conclusão.)

Em princípio, as duas premissas, juntas, poderiam ter mais quatro termos diferentes. Já sabemos, porém, que os dois termos extremos têm de aparecer nas premissas. Dos quatro termos, assim, sobram apenas dois que poderiam ser diferentes. No entanto, a análise mostra que, além de possuir dois termos iguais aos da conclusão, as premissas precisam possuir um termo que seja comum entre elas, pois é justamente esse termo que permitirá estabelecer uma conexão entre os dois termos que aparecerão na conclusão. É o chamado "termo médio".

Resumindo: Todo silogismo válido apresenta três termos. Um deles, o termo médio, aparece nas duas premissas, mas não na conclusão. Os outros dois termos, ditos "termos extremos", aparecem ambos na conclusão, porém cada um deles em uma única premissa.

Exemplo

Todo homem é animal

Todo animal é mortal;

logo Todo homem é mortal.

As regras do silogismo válido

Para utilizar as regras abaixo, é necessário apenas: Saber identificar o termo médio e os termos extremos de um silogismo, recordar quais são os termos distribuídos e quais são os termos não-distribuídos em cada forma categórica .

Regra I: O termo médio deve estar distribuído uma única vez. (termo médio nas duas premissas, não pode aparecer na conlusiva)

Regra II: Nenhum dos termos extremos pode estar distribuído apenas uma vez. (dois termos extremos devem aparecer na premissa e na conclusão)

Regra III: O número de premissas negativas deve ser igual ao número de conclusões negativas. (havendo uma premissa negativa, a conclusão será negativa)

OBS: De duas premissas particulares nada se conclui. Tendo uma particular e uma universal, a conclusiva será sempre particular.

A regra I significa que, das duas aparições do termo médio (uma em cada premissa), em uma e somente uma ele deve estar distribuído.

A regra II significa que, se um termo extremo está distribuído na (única) premissa em que aparece, então ele deve estar distribuído na conclusão; se não estiver distribuído na premissa, não deve estar distribuído na conclusão.
(Isso vale, é bom frisar, para cada um dos dois termos extremos.)

Finalmente, a regra III estabelece o seguinte: para o silogismo ser válido, ou as duas premissas e a conclusão são afirmativas ou uma das premissas é negativa e a conclusão também. Não existe silogismo válido com duas premissas negativas, nem com conclusão negativa a partir de duas premissas afirmativas.

O fato interessante a notar é que essas três regras são necessárias e suficientes.

Não há silogismo válido que não obedeça todas as três regras (elas são condição necessária da validade). Por outro lado, se um silogismo obedece as três, então podemos estar seguros de que ele é válido (são condições suficientes de validade).

Alguns exemplos

Vamos examinar o seguinte silogismo:

Todo artista é excêntrico

Alguns brasileiros não excêntricos;

logo Alguns brasileiros não são artistas

As regras do silogismo válido

Para utilizar as regras abaixo, é necessário apenas: Saber identificar o termo médio e os termos extremos de um silogismo, recordar quais são os termos distribuídos e quais são os termos não-distribuídos em cada forma categórica .

Regra I: O termo médio deve estar distribuído uma única vez. (termo médio nas duas premissas, não pode aparecer na conclusiva).

Regra II: Nenhum dos termos extremos pode estar distribuído apenas uma vez. (dois termos extremos devem aparecer na premissa e na conclusão)

Regra III: O número de premissas negativas deve ser igual ao número de conclusões negativas. (havendo uma premissa negativa, a conclusão será negativa)

OBS: De duas premissas particulares nada se conclui. Tendo uma particular e uma universal, a conclusiva será sempre particular.

A regra I significa que, das duas aparições do termo médio (uma em cada premissa), em uma e somente uma ele deve estar distribuído. A regra II significa que, se um termo extremo está distribuído na (única) premissa em que aparece, então ele deve estar distribuído na conclusão; se não estiver distribuído na premissa, não deve estar distribuído na conclusão.

(Isso vale, é bom frisar, para cada um dos dois termos extremos.) Finalmente, a regra III estabelece o seguinte: para o silogismo ser válido, ou as duas premissas e a conclusão são afirmativas ou uma das premissas é negativa e a conclusão também. Não existe silogismo válido com duas premissas negativas, nem com conclusão negativa a partir de duas premissas afirmativas.

O fato interessante a notar é que essas três regras são necessárias e suficientes.

Não há silogismo válido que não obedeça todas as três regras (elas são condição necessária da validade). Por outro lado, se um silogismo obedece as três, então podemos estar seguros de que ele é válido (são condições suficientes de validade).

Vamos examinar o seguinte silogismo:

Todo artista é excêntrico
Alguns brasileiros não excêntricos;
logo Alguns brasileiros não são artistas

Para a facilidade da análise, podemos representar os silogismos em um diagrama que condense todas as informações relevantes. Nessa representação, "M" para indica o termo médio;

"S" o termo extremo que é sujeito da conclusão;

e "P" o termo extremo que é predicado da conclusão.

A letra que aparece entre os termos de cada enunciado indica sua forma categórica (A, E, I, ou O).

As expressões "d" e "nd", subscritas a um termo, indicam se, naquele enunciado, o termo está distribuído ou não-distribuído.

Pd A Mnd (A: sujeito distribuído e predicado não-distribuído)

Snd O Md (O: sujeito não-distribuído e predicado distribuído)

Snd O Pd (idem)

Verifiquemos agora se o silogismo satisfaz as três regras dadas acima:

Regra I: Satisfeita – O termo médio está distribuído apenas na segunda premissa, ou seja, uma única vez.

Regra II: Satisfeita – P está distribuído duas vezes (na premissa em que aparece e na conclusão); S não está distribuído nenhuma vez (nem na premissa, nem na conclusão). Não há termo extremo distribuído.

Regra III: Satisfeita – A conclusão é negativa; apenas uma das premissas, a segunda, é negativa. O número de premissas e conclusões negativas é igual.

O silogismo, portanto, é válido.

Pd A Mnd

Sd E Md

Sd E Pd

Todo artista é excêntrico

Nenhum filósofo infeliz;

logo Nenhum filosofo é mortal

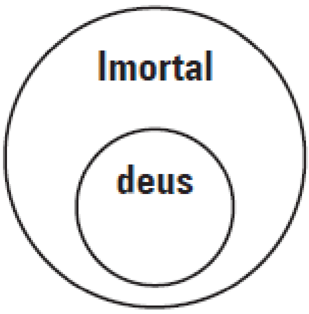
Regra I: Satisfeita – O termo médio está distribuído uma única vez, na segunda premissa.

Regra II: Satisfeita – Tanto S como P estão distribuídos duas vezes.

Regra III: Satisfeita – A conclusão é negativa, e uma premissa é negativa.

O silogismo, portanto, é válido. É interessante observar, porém, que a conclusão é falsa. De fato, a falsidade da conclusão não implica a invalidade do raciocínio, da construção lógica do argumento. No caso de um silogismo válido, ela apenas mostra que (ao menos) uma das premissas é falsa – no nosso exemplo, talvez as duas.

Md A Pnd
Sd E Md
Sd E Pd
Todo deus é imortal
Nenhum rei é deus
Logo: Nenhum rei é deus
Regra I: Não é satisfeita – O termo médio está distribuído duas vezes. O fato de nenhum rei ser deus não implica que nenhum seja imortal, dentro do argumento, não no critério de verdade e falsidade.
O conjunto daqueles que são reis pode estar tanto fora do conjunto dos imortais, como dentro, só não está dentro do conjunto dos deuses, portanto, a conclusiva não é lógica.



O silogismo, portanto, é inválido (não preciso sequer testar as outras regras).
Aqui, a conclusão é verdadeira, embora o silogismo em si seja inválido.
Podemos ver, além disso, que as duas premissas são verdadeiras.
Não importa: a validade do silogismo, mais uma vez, não se confunde com a verdade da conclusão. Um raciocínio equivocado pode chegar, por

coincidência, a partir de premissas falsas ou verdadeiras, a um resultado correto. Que o silogismo é inválido, porém, mostra-nos o fato de que sua forma não consegue garantir a verdade da conclusão a partir de premissas verdadeiras. Para ver isso, pode-se substituir, no exemplo acima, a palavra "imortal" por "justo": as duas premissas serão verdadeiras, mas a conclusão (para quem não tiver uma visão muito pessimista do mundo) será falsa.

O Estudo Tradicional do Silogismo

Todo silogismo possui duas premissas.
Como isso é feito?
Já vimos que, na conclusão de um silogismo, aparecem os dois termos que chamamos de "termos extremos". Aquele que aparece como sujeito da conclusão é tradicionalmente chamado de "termo menor", e aquele que aparece como predicado da conclusão, de "termo maior". Cada uma das premissas apresenta apenas um desses dois termos extremos (ao lado do termo médio). Aquela premissa que apresenta o termo maior é chamada de "premissa maior", e deve ser colocada em primeiro lugar no silogismo; a premissa que apresenta o termo menor é chamada de "premissa menor", e vem na segunda posição.

Por "modo" de um silogismo, entendemos a sequência de suas formas categóricas.
Assim, por exemplo: AOI
Modo em que a premissa maior é universal afirmativa (A);
Premissa menor é particular negativa (O);
Conclusão é particular afirmativa (I).

Como existem quatro formas categóricas, o número total de combinações possíveis para as três premissas, postas em ordem conforme explicamos acima, é de 64 (= 4 x 4 x 4). São 64, portanto, os modos possíveis do silogismo.

As figuras

A posição das duas ocorrências do termo médio determina aquilo a que chamamos "figura" do silogismo. Como são duas as posições possíveis (sujeito ou predicado), e duas as premissas (maior e menor), o número de combinações é agora 4 (= 2 x 2). Existem, assim, quatro figuras. São elas:

Primeira figura: o termo médio é sujeito na premissa maior e predicado na premissa menor.

Segunda figura: o termo médio é predicado nas duas premissas.

Terceira figura: o termo médio é sujeito nas duas premissas.

Quarta figura: o termo médio é predicado na premissa maior e sujeito na premissa menor.

Os silogismos válidos e seus nomes

Para caracterizar plenamente a forma de um silogismo, é necessário informar a sua figura e o seu modo.

Assim, um silogismo da terceira figura no modo AEE é: "todo M é P" (A), "nenhum M é S" (E); logo "nenhum S é P" (E) – por sinal, um silogismo inválido.

Considerando-se que existem 64 modos e 4 figuras possíveis para os silogismos, o total de formas silogísticas é igual a 256 (= 64 x 4). Dessas, um número surpreendentemente baixo é válido: apenas 19.

Na tradição medieval, cada silogismo tido como válido ganhou um nome.

Criados para facilitar a memorização, esses nomes trazem uma sequência de vogais que corresponde ao modo do silogismo. Contudo, silogismos de um mesmo modo, em duas figuras diferentes, recebiam nomes diferentes.

É o que acontece com Camestres (AEE) e Calemes (AEE), ambos silogismos válidos, o primeiro da segunda figura, e o segundo da quarta figura.

Abaixo, fornecemos a lista completa dos silogismos tradicionalmente tidos como válidos e seus nomes tradicionais, organizados por figura.

(Observamos aqui que nem todos eles seriam considerados como válidos segundo as regras que vimos na aula anterior. Você consegue descobrir quais, e por quê?)

Primeira figura: São válidos os silogismos dos modos AAA (Barbara), EAE (Celarent), AII (Darii) e EIO (Ferio).

Segunda figura: São válidos os silogismos dos modos EAE (Cesare), AEE (Camestres), EIO (Festino) e AOO (Baroco).

Terceira figura: São válidos os silogismos dos modos AAI (Darapti), AII (Datisi), EAO (Felapton), EIO (Ferison), IAI (Disamis) e OAO (Bocardo).

Quarta figura: São válidos os silogismos dos modos AEE (Calemes), AII (Bamalip), EAO (Fesapo), EIO (Fresison) e IAI (Dimatis).

Variações do Silogismo

Na vida cotidiana, porém, utilizamos inúmeras frases declarativas que não possuem a estrutura de um enunciado categorial. Precisamos examinar um pouco melhor esse fenômeno.

Transformação para a forma predicativa

Do ponto de vista aristotélico, podemos dizer que todo enunciado simples (que definimos como aquele enunciado que contém um único verbo ou locução verbal) pode ser reconduzido à forma predicativa. A forma predicativa, mais ainda, é considerada a forma logicamente mais transparente, pois revela a estrutura ontológica descrita pelo enunciado.

Tomemos, por exemplo, a seguinte frase: “todo gasto do governo americano com armamentos reduz, a longo prazo, a possibilidade de uma paz duradoura no mundo”.

Eis uma típica afirmação que poderia aparecer em conversas políticas. Qual a forma predicativa que estaria por trás desse enunciado?

Para fazer com que o enunciado em questão possa figurar em um silogismo (em uma argumentação silogística), temos de operar uma transformação sobre ele. O sujeito do enunciado deve permanecer o mesmo; quanto ao predicado, porém, é necessário isolá-lo sob a forma de uma classe de coisas.

No exemplo acima, teríamos: “todo gasto do governo americano com armamentos é um fator de redução a longo prazo da possibilidade de uma paz duradoura no mundo”.

Outros exemplos de transformação são: “nenhum ser humano inteligente deseja a guerra” para “nenhum ser humano inteligente é um ser que deseja a guerra”;

“alguma onda gigante provocará uma catástrofe na Austrália” para “alguma onda gigante será um evento catastrófico para a Austrália”; e assim por diante.

Formas equivalentes

As formas categóricas, muitas vezes, aparecem “disfarçadas” sob outras formas que lhe são logicamente equivalentes. Aqui, seria necessário explicitar a noção de “equivalência lógica”. De maneira geral, duas proposições são logicamente equivalentes se cada uma delas pode ser derivada da outra, ou seja, se cada uma delas implica a outra (temos aqui uma noção essencialmente sintática de equivalência, que depende das regras de transformação de cada sistema lógico). Do ponto de vista que estamos adotando nesta unidade, e que acompanha o espírito da Lógica aristotélica, dois enunciados são logicamente equivalentes quando se considera que eles “dizem” a mesma coisa (uma noção essencialmente semântica de equivalência).

Assim, na linguagem usual, são equivalentes à forma categórica A os seguintes enunciados, entre outros (esse assunto está muito bem tratado no livro de W. Salmon, cuja listagem serviu de base à nossa):

Forma categórica A: Toda planta é verde

Formas equivalentes: Qualquer planta é verde
Plantas são verdes
Qualquer coisa que seja planta é verde

Se uma coisa é planta, então é verde*
Qualquer coisa que não seja verde não é planta
Se uma coisa não é verde, então não é planta*
Todas as coisas não-verdes são não-plantas
Uma coisa é planta somente se for verde
Somente coisas verdes são plantas
Nenhuma planta não é verde

* Formas condicionais desse tipo dependem de como a teoria lógica utilizada interpreta a relação de implicação. A equivalência é válida quando se adota a chamada implicação material, de que trataremos ao estudar o cálculo proposicional.

Formas equivalentes: Todos os sapos são não-mamíferos
Todos os mamíferos são não-sapos
Nenhum mamífero é sapo
Nada que seja um mamífero é um sapo
Apenas não-sapos são mamíferos
Apenas não-mamíferos são sapos
Se uma coisa é sapo, então não é mamífero*
Se uma coisa é mamífero, então não é sapo*

Forma categórica I: Alguns príncipes são encantados

Formas equivalentes: Algumas coisas encantadas são príncipes
Existem príncipes que são encantados**
Existem príncipes encantados**
Alguma coisa que é um príncipe é encantada
Ao menos um príncipe é encantado

** Lembrar do conteúdo existencial de enunciados particulares

Forma categórica O: Algumas abelhas não são africanas

Formas equivalentes: Existe uma abelha que não é africana**
Nem toda abelha é africana

O entimema

Devemos mencionar ainda o fenômeno conhecido como “entimema”, em que uma das premissas está subentendida. Se alguém nos diz, por exemplo, que “todo advogado é ganancioso; logo, Pedro é ganancioso”, devemos entender que o interlocutor, para mostrar/provar sua opinião, usou um silogismo válido da forma “Barbara”. Não julgou necessário, porém, explicitar a premissa “Pedro é advogado”.

A Noção de Forma

Constantes lógicas e termos variáveis

Para efeitos de nossa análise, consideraremos como “enunciado” qualquer composição linguística da qual se possa dizer que é verdadeira ou falsa. Uma “expressão”, então, será qualquer parte compositiva de um enunciado, ou seja, qualquer elemento que possa figurar como parte de um enunciado.
As expressões desse segundo grupo são substituídas, como já fazia Aristóteles, por letras do alfabeto. Tais letras funcionam como variáveis: elas indicam um lugar vazio de uma formação linguística, que ao ser preenchido dá origem a um enunciado.

O Princípio de Bivalência

Os dois valores de verdade

Uma frase declarativa – ou enunciado, segundo a terminologia que temos usado – é uma expressão linguística (uma sequência simbólica) que busca descrever o mundo. (De maneira mais geral, que busca descrever certo domínio de objetos cuja descrição é o próprio objetivo da linguagem. Se esse domínio precisa ou não ser o mundo, e em qual sentido, é um tema controverso; para ver isso, basta pensar na matemática e nas afirmações matemáticas. A respeito de quê elas falam?). Por outro lado, já definimos o enunciado (ver aula da Unidade III) como qualquer expressão linguística da qual se possa dizer que é verdadeira ou falsa. Em outras palavras: dada certa expressão, se podemos dizer que ela é verdadeira, então ela é um enunciado; se podemos dizer que ela é falsa, idem.

Dizer que um enunciado é verdadeiro é o mesmo que dizer, segundo uma terminologia que agora introduziremos, que o seu "valor de verdade" é "verdade"; dizer que um enunciado é falso é dizer que seu "valor de verdade" é "falsidade". Verdade e falsidade, portanto, são dois valores de verdade de enunciados. Correspondentemente, a possibilidade de receber esses dois valores de verdade é uma característica daquela classe de expressões a que chamamos de enunciados.

O Princípio de Bivalência estabelece que "verdade" e "falsidade" são os únicos dois valores de verdade que cabem aos enunciados. Estabelece, mais ainda, que qualquer enunciado S de uma linguagem tem de possuir exatamente um desses dois valores de verdade, mas não os dois.

Aceitação do Princípio de Bivalência

O Princípio de Bivalência é assumido por todos, ou quase todos, os sistemas formais da Lógica clássica. Existem sistemas de lógica não clássica, porém, nos quais esse princípio é rejeitado (sistemas, por exemplo, que lidam com mais de dois valores verdade). O exemplo mais famoso de Lógica não clássica que rejeita o Princípio de Bivalência é a Lógica intuicionista desenvolvida na primeira metade do século XX por Brouwer e Heyting.

Existem ainda pensadores que, embora estejam dispostos a aceitar um ou outro sistema formal da Lógica clássica como essencialmente válidos ou corretos, negam a relevância para o estudo lógico dos conceitos de verdade ou falsidade, que preferem substituir por outros.

Saindo do campo estrito das lógicas formalizadas, uma pergunta bastante interessante é: pode-se dizer que o Princípio de Bivalência seja uma característica de linguagens naturais, como o português? Se pensarmos em enunciados do tipo mais comum, como “Pedro é pedreiro” ou “sempre que estuda, José fica com sono”, parece que sim. No entanto, há dois casos que apontam em direção diversa.

O primeiro caso envolve termos individuais para os quais não há referente, como na frase “O filho de Santos Dumont amava os pássaros”. Como o pai da aviação não teve filhos, não está claro se esse enunciado deveria ser visto como verdadeiro (por falta do que o possa falsificar) ou falso (por referir-se a um objeto que não existe). O segundo caso envolve os chamados “termos indexicais”: aqueles termos cujo significado varia de acordo com as circunstâncias em que o enunciado é emitido. São termos como “aqui”, “agora” ou “ontem”. Pense-se na frase: “Ontem fez muito frio aqui”. Ela é falsa, ou verdadeira?

As razões éticas para a rejeição do princípio

As razões por que Aristóteles não aceita a doutrina do necessitarismo são de natureza ética. Para ele, a aceitação de tal doutrina implicaria a negação da liberdade humana. Implicaria aceitar que o homem nem é livre, nem é responsável por suas ações, o que acarretaria o colapso de todo o projeto ético-filosófico.

De fato, para Aristóteles, só é livre aquele que pode escolher entre mais de um curso de ação, sem ser determinado nesse processo por nenhuma outra causa que não ele próprio, ou seja, sem que nenhuma causa externa force-o a escolher um dos caminhos – pois, nesse caso, não se poderia falar significativamente em escolha, mas apenas, talvez, em uma aparência de escolha. Mais ainda: como ninguém pode ser responsabilizado por um curso de ação que não escolheu, por uma situação da qual não foi causa e que sempre esteve determinada, na medida em que teria necessariamente de ocorrer, Aristóteles via nessa doutrina a supressão de qualquer conceito possível de responsabilidade ética.

O compromisso de Aristóteles com essa posição ética é tão forte que o levará a abandonar, em sua forma mais ampla, um princípio lógico tão importante quanto o Princípio de Bivalência. Vejamos como isso ocorre.

O valor de verdade de enunciados futuros

Visto de maneira simplificada, o problema reside no Princípio de Bivalência (doravante indicado como PB) quando aplicado a enunciados acerca de eventos futuros. O exemplo clássico, utilizado por Aristóteles, é: "Amanhã haverá uma batalha naval". Segundo o PB, só existem dois valores de verdade possíveis para esse enunciado: verdade ou falsidade. Esse enunciado ou é verdadeiro, ou é falso. Aparentemente, ele não pode ser verdadeiro hoje, e falso amanhã, ou vice-versa. Portanto, o que quer que venha a acontecer amanhã, já está determinado desde hoje. Posso não saber se amanhã haverá ou não uma batalha naval (o que representa uma mera limitação minha); mas como o enunciado que afirma essa batalha já é falso, ou verdadeiro, desde hoje, o evento já está determinado desde hoje.

O que Aristóteles faz para resolver esse problema é distinguir entre a validade em ato e a validade em potência do PB como preceito lógico (essa distinção entre ato e potência, como sabemos, é central para toda a filosofia aristotélica, a começar por sua metafísica). Afirmar o PB como princípio em ato equivaleria a afirmar que todo enunciado – seja sobre o passado ou sobre o futuro – ou é verdadeiro ou é falso. A validade potencial do PB, por outro lado, equivale a afirmar que todo enunciado é verdadeiro-ou-falso (também nesse caso consideram-se somente dois valores de verdade possíveis; eles não estão atuantes, porém, sobre todas as proposições).

Aristóteles aceita o PB em ato para todos os enunciados, menos aqueles que tratam de eventos futuros; para estes, ele só admite o PB em potência.

Essa concessão não deve ser desprezada: ela significa rejeitar a validade universal do PB em sua forma tradicional e mais forte. Do ponto de vista lógico, essa é a operação realizada por Aristóteles. Como sempre no pensamento aristotélico, porém, essa operação lógica está bem amparada por pressupostos metafísicos e ontológicos.

Podemos aceitar como pressuposto ontológico que a batalha naval, como fato do mundo, deve ocorrer (fato E) ou não ocorrer (fato não-E). Como E implica a verdade de “E” (“E” é o enunciado que descreve E), e não-E implica a falsidade de “E”, parece que nosso pressuposto (que pode ser equacionado ao Princípio do Terceiro Excluído, conforme veremos em outra aula) implica o PB, em sua versão mais forte (atual não potencial).

O Princípio de Não-Contradição

As três formulações aristotélicas para o PNC

Seguiremos, na exposição que se segue, o excelente ensaio Sobre a Lei de Contradição em Aristóteles, do lógico polonês Jan Lukasiewicz, um dos mais importantes pensadores da área no começo do século XX. Esse ensaio pode ser encontrado em português no livro organizado por Marco Zingano (ver bibliografia).

Em sua obra – e isso já não nos deveria surpreender, em vista do que estudamos em unidades anteriores – Aristóteles formula o PNC em três versões diferentes: uma versão ontológica, uma versão psicológica, e uma versão propriamente lógica. As três versões, mais ainda, encontram suas formulações exemplares na Metafísica. São elas:

Formulação ontológica: “É impossível que o mesmo simultaneamente pertença e não pertença ao mesmo sob o mesmo aspecto” (Metafísica, 3 – livro Gama, capítulo 3). Lukasiewicz propõe reformular esse princípio do seguinte modo, que tornaria mais clara a intenção de Aristóteles: “A nenhum objeto a mesma propriedade pode simultaneamente pertencer e não pertencer”.

“Não se pode crer que o mesmo (simultaneamente) seja e não seja” (Metafísica, 3). Lukasiewicz reformula assim: “Dois atos de crença correspondendo a duas asserções contraditórias não podem existir simultaneamente na mesma consciência”.

Formulação lógica: “O mais seguro de todos os princípios básicos é que asserções contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras”

(Metafísica, 6). Lukasiewicz reformula assim: “Duas asserções contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras”.

Vemos aqui, mais uma vez, o peculiar entrelaçamento de temas lógicos e metafísicos que caracterizam a Lógica aristotélica, acrescido ainda de uma consideração de caráter psicológico (que se revelará, porém, subsidiária das outras duas, como veremos adiante). Vamos examinar como Aristóteles considerava a relação entre as três formulações do que, para ele, era um mesmo princípio.

A relação entre as formulações

Em primeiro lugar, devemos ter claro que as três formulações dizem respeito a entidades que a filosofia posterior tratou cada vez mais de distinguir.

Assim, uma delas – a ontológica – diz respeito ao mundo do ser, ao falar em objetos e propriedades (“...o mesmo pertença e não pertença ...ao mesmo ...”; em grego, esse fato fica um pouco escondido por trás da utilização de pronomes). Outra – a Lógica – diz respeito a enunciados e seu valor, de verdade. Finalmente, a formulação psicológica diz respeito a crenças em uma consciência.

Para Aristóteles, a terceira formulação, de caráter psicológico, poderia ser demonstrada a partir da formulação lógica. Em outras palavras: a lei lógica de não-contradição, mais fundamental, seria capaz de servir de fundamento a uma demonstração da lei psicológica de não-contradição, que lhe seria, portanto, derivada. Não nos interessa, aqui, examinar os detalhes da demonstração dada por Aristóteles. Cabe apenas mencionar que ela se equivoca ao confundir crenças com propriedades da consciência e, mais ainda, supor que crenças opostas correspondem a propriedades contraditórias.

Apenas para se ter uma ideia, podemos dizer que, para Aristóteles, “crer em A” seria uma propriedade da consciência C. Chamemos essa propriedade de P(C). Então, “não crer em A” também seria uma propriedade da consciência C. Mais especificamente, seria a propriedade contraditória a P(C), ou seja, não-P(C). Segundo o princípio lógico de não-contradição, porém, não pode acontecer que duas asserções contraditórias, como P(C) e não-P(C), sejam, simultaneamente, verdadeiras. Seguiria daí que não é possível que a consciência C creia e não creia em A ao mesmo tempo.

Está claro, contudo, que uma afirmação acerca do que se passa na consciência individual C só pode ser fruto de uma investigação empírica. Uma coisa é supor que não é razoável que uma pessoa creia, simultaneamente, em duas afirmações contraditórias; outra é supor que as consciências reais, de fato, comportam-se assim, em todos os casos. Para mostrar uma dificuldade imediata, é bastante possível alguém crer que “Leonardo da Vinci está morto” e que “o pintor da Monalisa está vivo” – desde que não saiba que Leonardo da Vinci é o pintor da Monalisa.

A respeito da relação entre a lei ontológica de não-contradição e a lei lógica de não-contradição, Aristóteles acreditava que elas fossem equivalentes. (Aliás, a própria demonstração que esboçamos acima, da lei psicológica de não contradição, transita entre as outras duas como sua base). Aristóteles não apenas supunha que elas fossem equivalentes, como também acreditava que eram tão básicas que não poderiam ser provadas a partir de nenhum outro princípio ainda mais básico: a lei lógico-ontológica de não-contradição seria uma lei absolutamente última e indemonstrável.

O uso lógico da palavra “não”

O Princípio de Não-Contradição, da maneira como é hoje compreendido, é um princípio que diz respeito à negação como operador lógico. Em outras palavras, ele diz respeito ao uso da palavra “não” dentro de um sistema lógico. Mas como devemos compreender, exatamente, essa palavra (ou partícula)?

Se levarmos em conta o que estudamos na aula 25, na Unidade III, perceberemos sem dificuldades que a palavra “não” deve ser considerada como pertencendo, muito naturalmente, à classe das constantes lógicas (já Aristóteles tratou-a desse modo no momento de estabelecer suas formas categóricas). Como constante lógica, mais ainda, ela atua sobre enunciados: dado um enunciado E, sempre podemos construir um outro enunciado com auxílio da partícula “não”, mais especificamente o enunciado “não-E”, a negação do enunciado original E. Há, como é igualmente fácil perceber, uma relação entre o enunciado E e sua negação não-E. Essa relação deve corresponder àquilo que entendemos intuitivamente por negação, ou seja, as regras que regem o uso da partícula “não” em um sistema lógico formal são estabelecidas com o objetivo de captar, da maneira mais adequada possível, o uso da palavra “não” em linguagens naturais como o português. A questão, que até aí pareceria bem simples, complica-se quando constatamos, após certo estudo detalhado, que a idéia de negação não é tão trivial quanto talvez acreditássemos – que, na verdade, ela não é nada trivial.

O PNC, então, é um dos princípios que, em diversos sistemas de lógica, regem o uso da partícula lógica “não”. (Seria melhor dizer, talvez, que ele é um dos princípios que orientam a formulação das regras formais de diversos sistemas lógicos pois o que rege o uso de um termo lógico em determinado sistema são sempre suas regras formais e o PNC não é uma regra formal.) Especificamente, o PNC estabelece que a conjunção de um enunciado com a sua negação é sempre um enunciado falso. Em outras palavras, dado um enunciado E e sua negação não-E, o (terceiro) enunciado “E e não-E” (a conjunção dos dois primeiros) é sempre falso.

Distinção entre PB e PNC

Em primeiro lugar, vamos examinar por que razão PNC parece ser tão fundamental.

Para isso, o comparemos novamente com PB. O Princípio de Bivalência estabelece que existem dois, e somente dois, valores de verdade, “verdade” e "falsidade", e que cada enunciado deve receber um único desses valores. Como observamos na primeira aula desta unidade, existem sistemas de lógica formal que não obedecem ao PB e que consideram a possibilidade de mais de um valor de verdade.

É possível, por exemplo, formalizar um sistema lógico com um valor intermediário de verdade. Um sistema como esse pode se revelar extremamente útil para um estudo epistêmico a respeito do estado de conhecimento de certo grupo: o valor verdade intermediário indicaria que não se sabe a verdade ou falsidade de um enunciado. Por razões diferentes, também alguns sistemas de lógica quântica (certos sistemas de lógica formal elaborado para lidar com fenômenos pouco intuitivos da física quântica) não se restringem aos dois valores clássicos de verdade.

Também é possível pensar em sistemas de lógica probabilística (sistemas elaborados para lidar com fenômenos de probabilidade) nos quais, a cada enunciado, é associado um número real entre 0 e 1, que indica a sua probabilidade.

Os valores de verdade, "verdade" e "falsidade", corresponderiam aos dois casos-limite, respectivamente ao número 1 e ao número 0.

Entre eles, haveria uma infinidade de outras possibilidades.

No entanto, pode-se argumentar que, qualquer que seja o número admitido de valores de verdade – dois, três ou infinitos –, os dois valores de verdade clássicos devem continuar a excluir-se mutuamente. Em outras palavras: Se, entre os valores de verdade, continuam a figurar os dois valores "verdadeiro" e "falso" (como é quase sempre o caso), então não é possível

que os enunciado E e não-E sejam, ao mesmo tempo, verdadeiros. Não é possível que a conjunção "E e não-E" seja verdadeira. Esse é o PNC.

Alguns estudiosos veem na obediência a esse princípio uma exigência profunda, respeitante à própria possibilidade de ver o homem como serque atua sobre mundo *com certos propósitos*, ou seja, como ser capaz de alguma ação dirigida a fins. De fato, se uma pessoa deseja, por meio de suas ações, obter o resultado A, a primeira coisa que se deve exigir é que ela saiba distinguir o que é A do que é não-A, opondo-os (pois um deles é o seu objetivo, e o outro não é).

Trivialidade dedutiva

Outro aspecto que parece indicar o caráter indispensável de PNC para sistemas lógicos diz respeito à estrutura dedutiva desses sistemas. Como já vimos, a estrutura dedutiva de um sistema lógico trata da possibilidade de passar validamente de certos enunciados, as premissas, a outros enunciados, que se consideram como logicamente decorrentes dessas premissas (as conclusões). A estrutura dedutiva é fornecida por meio de certas "regras de dedução". A partir dos "axiomas", vistos como enunciados inicialmente aceitos, e por meio dessas regras, são deduzidos todos os outros enunciados válidos do sistema.

Um resultado bastante interessante da Lógica clássica mostra que, se uma contradição do tipo "E e não-E" é aceita como axioma, ou se aparece (é deduzida) em qualquer lugar do sistema, então qualquer outro enunciado pode ser deduzido. O sistema, como se costuma dizer, torna-se trivial: aceita uma contradição como verdadeira, então pode-se provar que todos os outros enunciados são verdadeiros. Essa situação é obviamente inadequada; um sistema lógico desse tipo, em que todas as afirmações são verdadeiras, não possui nenhuma serventia. A ocorrência desse fenômeno, portanto, poderia ser um bom argumento contra a possibilidade de se aceitar enunciados contraditórios do tipo "E e não-E", ou seja, um bom argumento a favor da necessidade do PNC.

Ela seria, de fato, um excelente argumento, não fosse o fato de que é a principal motivação para o desenvolvimento de sistemas em que não vale o PNC.

A questão toda passa a ser a obtenção de um sistema que, diante de uma contradição, não se trivialize. A tentativa, então, é de elaborar regras formais de lógica que possam, por assim dizer, "conviver" com a contradição, sem que o sistema como um todo, por isso, colapse em uma imensa trivialidade.

Sistemas desse tipo podem revelar-se úteis para a análise do efetivo comportamento linguístico e epistêmico das pessoas, que muitas vezes aceitam certas contradições (de maneira consciente ou inconsciente), sem que com isso estejam dispostas a aceitar qualquer coisa. Por outro lado, sistemas desse tipo podem ser interessantes para a ciência da computação e para pesquisas no campo de inteligência artificial, garantindo que o eventual aparecimento de contradições possa ser manipulado sem provocar o colapso do sistema como um todo.

O Princípio do Terceiro Excluído

Duas formulações

O Princípio da Bivalência (PB) diz respeito aos valores de verdade admitidos em um sistema lógico (que supõe serem apenas dois: verdade e falsidade) e sua distribuição pelos enunciados (cada enunciado recebe necessariamente um único valor verdade). Já o Princípio de Não-Contradição (PNC) diz respeito à maneira como a constante lógica “não” deve ser utilizada em um sistema lógico, ao estabelecer que enunciados compostos da forma “E e não-E” (em que E é qualquer enunciado mais simples) são sempre falsos. Mais precisamente, PNC diz respeito às regras que determinam a manipulação formal da constante “não”. O princípio propõe que as regras sejam formuladas de tal maneira que nenhum enunciado com a forma “E e não-E” seja aceito como um enunciado válido do sistema.

Nesse sentido, o Princípio do Terceiro Excluído (PTE) aproxima-se mais de PNC. Também ele é um princípio que diz respeito à maneira de tratar a constante “não” em sistemas lógicos. O que o PTE estabelece, porém, é diferente. Em um sistema lógico em que vale PTE, enunciados compostos da forma “E ou não-E” são sempre verdadeiros. Mais precisamente, as regras do sistema lógico devem ser tais que todos os enunciados com a forma referida possam ser deduzidos como enunciados válidos do sistema. (Observe-se que oferecemos, tanto para PNC como para PTE, duas formulações.

A primeira delas, em cada caso, fazia referência aos valores de verdade clássicos: verdade e falsidade. Desse modo, fica realçada a conexão classicamente existente entre esses princípios e PB. A segunda formulação é mais geral, ao prescindir da referência aos valores de verdade. Menciona-se apenas a possibilidade de se deduzir ou não, pelas regras formais do sistema, certos enunciados. (Fica em aberto a possibilidade de se associar os enunciados aceitos pelo sistema (enunciados válidos ou dedutíveis do sistema) a enunciados verdadeiros e os enunciados não aceitos pelo sistema (inválidos ou não dedutíveis) a enunciados falsos.)

Relação entre PNC e PTE

Equivalência clássica entre PNC e PTE

Na Lógica clássica, PNC e PTE são equivalentes. Essa equivalência segue das especiais relações que valem, nesses sistemas, entre as fórmulas que definem cada um dos dois princípios: “E e não-E” e “E ou não-E”. De fato, pode-se mostrar que na Lógica clássica “E ou não-E” é, como fórmula, equivalente à negação de “E e não-E”, no sentido de que uma sempre permite a dedução da outra. É equivalente, vale dizer, a “não-(E e não-E)”. Portanto, a validade de “E ou não-E” equivale, aí, à validade de “não-(E e não-E)”. Além disso, se aceitarmos PNC, como acontece na Lógica clássica, a validade da negação “não-(E e não-E)” equivale à invalidade de “E e não-E”.

Juntando esses resultados, tem-se que a validade de “E ou não-E” equivale à invalidade de “E e não-E”: se a primeira fórmula sempre vale, então a segunda nunca vale; se a segunda sempre vale, então a primeira nunca vale. Em suma, PNC implica PTE, e PTE implica PNC. Tem-se a equivalência entre ambos.

Isso, na Lógica clássica. Em lógicas não clássicas, cessa de valer a equivalência.

O PNC, então, parece mais fundamental e mais difícil de ser descartado do que PTE. Em sistemas de lógica intuicionista, por exemplo, apenas PTE não é aceito (PNC continua em vigor). Em tais sistemas, ao contrário do que ocorre em sistemas de lógica para consistente (cuja posição lógica é bastante sui generis), não se admitem contradições; contudo, nem sempre uma fórmula do tipo “E ou não-E” será verdadeira.

Os intuicionistas, então, perguntam: Qual o sentido de se admitir a existência de tais entidades?

Trata-se de uma questão bastante central para a filosofia da matemática, com amplas repercussões lógicas, e para a qual existem diversas abordagens possíveis, que escapam ao escopo do presente curso. O que nós tentamos fazer, aqui como nas demais aulas desta unidade, foi mostrar que a construção de sistemas lógicos não clássicos, os quais rejeitam um ou mais princípios fundamentais conhecidos desde a Antiguidade, não é um exercício arbitrário. Por meio deles, busca-se repensar questões filosóficas importantes, bem como resolver certos problemas concretos surgidos na ciência.

Raciocínios por absurdo

Para entender o que está por trás da construção desse tipo de lógica, que rejeita PTE, vamos ver que tipo de raciocínio PTE possibilita. Suponhamos que desejemos provar certo enunciado E. Infelizmente, porém, não dispomos de nenhum método direto para fazer isso. O que fazemos? Consideremos o enunciado não-E, e suponhamos que seja possível mostrar sua invalidade. Por PTE, então, podemos concluir a validade de E. Trata-se de um tipo de prova indireta que, no caso de enunciados existenciais, desperta algumas dúvidas. Consideremos, nesse sentido, um exemplo extraído da matemática (foi justamente no contexto de discussões matemáticas que surgiu a lógica intuicionista).

A Longevidade da Lógica Aristotélica

concentraremos nossa atenção no estudo da lógica contemporânea (que chamaremos também de lógica “moderna”, mas que não deve ser confundida com a lógica do período moderno). Mais especificamente, pretendemos apresentar, com suficiente grau de detalhes, um sistema de lógica simbólica formal capaz de expressar a matemática clássica (ou, ao menos, boa parte dela). Devido ao caráter mais acentuadamente técnico desse estudo, é somente à medida que esse sistema for sendo exposto que poderemos discutir seus diversos aspectos filosóficos, bem como o significado da construção como um todo.

Antes disso, porém, é importante falar alguma coisa a respeito do surgimento histórico da lógica simbólica formal nos moldes contemporâneos, e chamar atenção para suas principais características.

A lógica formal aristotélica contempla um número relativamente escasso de formas. No desenvolvimento histórico das ciências, ela acabou por mostrar-se crescentemente incapaz de fornecer uma moldura abrangente dentro da qual formular e entender os diversos raciocínios formais efetivamente requeridos (e utilizados) no estudo científico.

É possível conjeturar que essa aparente letargia do pensamento filosófico deveu-se ao fato de que Aristóteles, em suas obras, não se limitou a sugerir determinado elenco de formas a serem estudadas. Ele forneceu também razões filosóficas (muitas delas metafísicas) para se acreditar que aquelas formas específicas deveriam ser consideradas as únicas formas realmente fundamentais, a partir das quais todas as outras formas de discurso poderiam ser compreendidas. E essas razões, cujo efeito final, para a lógica, era uma limitação fundamentada do campo formal que se buscava examinar, pareceram, por muito tempo, sólidas o bastante para servir de base a uma disciplina que pretendia, justamente, sistematizar a estrutura do conhecimento.

Forma Predicativa e Forma Relacional

A forma relacional

Tomemos o enunciado com a forma predicativa básica: “S é P”. O predicado P é afirmado do sujeito S, situação que podemos representar, simbolicamente, como P(S) (lê-se “P de S”). Podemos considerar que tanto o termo “S” como o termo “P” indicam certas classes de indivíduos, aí incluído o caso especial de classes com um único indivíduo (ou até mesmo o caso da classe vazia). Para tornar mais clara a extensão da aplicação do predicado ao sujeito. Já a lógica aristotélica quantificava enunciados desse tipo. “Todo S é P” significando que tudo o que pode ser considerado como S deve ser considerado como P, ou seja, que a classe dos S está contida na classe dos P. (Por exemplo: “todo homem é mortal” significa que tudo o que é homem é também mortal, ou seja, que a classe dos homens está contida na classe dos mortais.)

Observações análogas valem para as outras três formas categóricas do enunciado: “Algum S é P” significa que a classe S não necessariamente está toda contida na classe P, mas que as duas têm, necessariamente, alguma parte (ao menos um elemento) em comum; “Nenhum S é P” significa que as classes S e P excluem-se mutuamente, ou seja, não têm nenhum elemento em comum; e “Algum S não é P” significa que as classes S e P não necessariamente excluem-se mutuamente, mas que as duas têm ao menos uma parte distinta. (algum elemento da classe S que não está na classe P)

Por esse motivo, dizemos que a lógica aristotélica – precisamente por ter adotado a forma predicativa como forma básica – é uma lógica de classes. Ela é essencialmente adequada a expressar a posição relativa entre

Nos sistemas de lógica moderna, a forma predicativa é mantida como *uma* das formas fundamentais da proposição (a partir de agora passaremos a adotar, como típico da lógica moderna, o termo “proposição”). Porém, ao contrário do que acontecia na lógica tradicional, a lógica moderna admite também, como forma fundamental da proposição, a forma *relacional*, por meio da qual é afirmada uma relação entre dois termos. Simbolicamente, essa forma é representada como R(*a, b*): certa relação R subsiste entre os elementos *a* e *b*.

Uma típica relação, por exemplo, é a relação de maternidade: a é mãe de *b*. Indiquemos essa relação pela letra “M”. Assim, temos que M(Maria, Jesus) e M(Jocasta, Édipo) são proposições verdadeiras, mas M(Monalisa, Leonardo da Vinci) é falsa. Outras relações típicas são “menores do que” (aplicada a números), “trabalha junto com” (aplicada a pessoas), “é predador de” (aplicada a espécies animais) etc.

Irredutibilidade da forma relacional

Algum aluno atento, neste ponto, poderia objetar o seguinte. Por que não expressamos as relações acima, como a relação de maternidade, sob a forma predicativa. Isso parece perfeitamente possível: “Jocasta é mãe de Édipo” é uma proposição com a forma predicativa e possui o mesmo significado que a proposição relacional indicada acima. O mesmo vale para proposições como “O leão é predador do veado” ou “Senna trabalha junto com Prost”.

Essa objeção, por um lado, está perfeitamente correta. De fato, é possível expressar sob a forma predicativa qualquer proposição (isoladamente considerada) que indique uma relação entre indivíduos específicos. Por outro, ela incorre no mesmo equívoco que acabou por causar tantas limitações à lógica tradicional: supor que essa possibilidade seja motivo para não considerar seriamente a forma relacional e averiguar o que ela tem de irredutível.

Para entender o que se passa, continuemos com nosso exemplo a respeito da maternidade. Uma relação como M(Jocasta, Édipo) pode, realmente, ser expressa por meio da seguinte forma predicativa: MdE(Jocasta), em que o predicado “mãe de Édipo” (simbolizado por “MdE”) é aplicado ao indivíduo “Jocasta”. No entanto, considere uma proposição como “Se a é mãe de b, então b não é mãe de a”. É possível expressá-los sob a forma predicativa? Que predicados deveriam usar? (Lembre-se de que “mãe” não é um predicado, pois predicados são aplicados a somente um elemento, ao passo que “mãe” exige dois elementos.).

O Declínio da Lógica Aristotélica

A ciência antiga e seu horizonte lógico

A lógica aristotélica fornece um sistema de lógica formal: Estabelece certas formas que julga adequada à descrição do mundo e examina certas relações (dedutivas) existentes entre tais formas. Para conseguir esse efeito, impressionante para o momento histórico em que foi elaborada, a teoria exposta no *Organon* acaba por efetuar – do ponto de vista lógico – uma excessiva simplificação. Apoiando-se em opiniões metafísicas a respeito da organização do ser, ela reduziu o número de formas analisadas; contudo, supôs que justamente essas formas seriam as mais fundamentais, capazes de fornecer a base sólida e imediatamente compreensível para todas as outras formas aparentemente mais complexas de descrição do ser e de raciocínio sobre o ser. (A simplificação lógica, por assim dizer, funcionava como parte complementar da doutrina metafísica.)

Na prática, os esquemas descritivos e dedutivos propostos pela lógica aristotélica nunca esgotaram o repertório de raciocínios e argumentações utilizados em discussões que visassem ao conhecimento. Isso vale, certa-mente, já desde o mundo grego. A matemática codificada por Euclides em seus

Elementos (obra que serviu de modelo à matemática e geometria por mais de dois mil anos, justamente pelo suposto rigor de seu procedimento.

lógico) mostra esse fato para além de qualquer dúvida, pois não poderia ter sido escrita, ou sequer concebida, se o autor se limitasse a usar, nas demonstrações que oferece, somente os esquemas lógicos tradicionais.

No entanto, a lógica aristotélica pôde, a despeito de suas limitações, permanecer para a ciência grega como um horizonte idealizado. O conhecimento do mundo poderia ser elaborado segundo suas formas (poderia ser reconduzido a essas formas). É possível mesmo argumentar que a ciência grega, e depois a ciência medieval da escolástica, conformaram-se crescentemente a certo ponto de vista lógico-metafísico proposto por Aristóteles.

Já no início da Idade Moderna, porém, essa situação alterou-se radicalmente. A insuficiência da lógica aristotélica tornou-se cada vez mais perceptível, frente aos novos rumos da ciência. Mas que rumos eram esses?

A ciência moderna e o uso da matemática

A partir da Idade Moderna, a ciência do mundo (dos fatos empiricamente observados) assume uma forma crescentemente “matematizada”. Isso significa que, em vez de falar em qualidades das substâncias, e de organizar essa substância em uma hierarquia de gêneros e espécies, a ciência começa a adotar a linguagem matemática para descrever os fenômenos do mundo. “O livro do mundo está escrito em linguagem matemática”, dirá Galileu Galilei (1564-1642), figura central dessa transformação filosófica e científica.

A lógica aristotélica como já sabe desde o curso de Lógica I, não possui recursos suficientes para expressar conceitos matemáticos. Assim, a partir do momento em que a pesquisa científica passa a fazer uso constante e essencial da matemática e, mais ainda, adota a descrição matemática como ideal de conhecimento, a lógica tradicional começa a parecer cada vez mais irrelevante para o projeto científico. Suas limitações como instrumento para articular o conhecimento do mundo tornam-se patentes; sua insuficiência deixa de ser um mero detalhe, possível de ser contornado, para se revelar uma falha profunda. A transformação na lógica, portanto, não ocorreu porque a lógica antiga fosse vista como errada, mas porque passou a ser vista – enquanto teoria formal – como trivial e irrelevante para os propósitos concretos da ciência. Essa transformação, que resultaria na lógica contemporânea, demoraria ainda a acontecer. Durante a Idade Moderna, o que ocorreu foi apenas uma progressiva corrosão da lógica aristotélica como instrumento científico.

O Surgimento da Lógica Moderna

A aproximação de lógica e matemática

A partir da Idade Moderna, a lógica formal recolhera-se a um papel notavelmente secundário no que diz respeito à efetiva prática científica. A idéia de uma ciência lógica e de sua importância para a cognição do mundo pode ter comparecido de maneira importante no pensamento de mais de um filósofo; o formalismo aristotélico, no entanto, mostrava-se perfeitamente anódino no campo das ciências.

No momento em que o estudo das funções matemáticas revelou que se escondiam ali, no próprio cerne da nova linguagem com que se buscava descrever o mundo, sérios problemas conceituais até então insuspeitos. Alguns pensadores não demoraram a perceber que se fazia necessária uma renovada análise lógica dos conceitos matemáticos. Que tipo de conceitos seriam esses? O que é, precisamente, um número? Que tipo de descrição do mundo os números e funções da matemática podem oferecer? De fato, como é possível descrever o mundo por meio de números e funções? Qual o significado dessa descrição e como ela ocorre?

Uma série de indagações de natureza marcadamente lógica voltava a ganhar destaque. Essas indagações nunca deixaram de estar presentes no pensamento filosófico. Sua entrada em cena pela porta da matemática avançada, no entanto, determinou um novo rumo de investigações. Surgiram as condições ideais para a elaboração de uma nova lógica formal, finalmente capaz de superar o esquema aristotélico. Essa nova lógica formal nascia duplamente ligada à matemática: como indagação dirigida a resolver certos problemas conceituais surgidos no âmbito matemático; e justamente por esse motivo, fazendo uso de um instrumental muito próximo ao da matemática.

O projeto de Frege

A figura central para o desenvolvimento da moderna lógica matemática foi o filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925). Matemático de formação, sua atenção logo se desviou para questões acerca da interpretação dos resultados matemáticos, sua estrutura lógica e sua aplicabilidade à descrição do mundo. Ao contrário de alguns lógicos do século XIX, que tentaram utilizar a matemática para expressar algebricamente certas leis lógicas, Frege acreditava que a lógica – como ciência mais geral possível, tendo por objetivo esclarecer as bases de toda e qualquer estrutura conceitual – é que deveria fundamentar a matemática.

Em seu *Begriffschrift* (“escrita conceitual”), obra escrita em 1879, ele obteve o primeiro sistema de lógica simbólica contemporânea. Seu objetivo era elaborar uma linguagem, formal e simbólica, suficientemente precisa para expressar conteúdos conceituais de maneira absolutamente inequívoca, sem qualquer ambiguidade ou inexatidão. Essa linguagem, além do mais, deveria ser rica o suficiente para formular os conceitos matemáticos, em particular o conceito de número. Dessa maneira, não apenas os problemas conceituais da matemática poderiam ser abordados dentro de uma moldura abrangente e rigorosa, como a própria utilização da matemática como instrumento de descrição do mundo ficaria explicada por meio de sua inserção em um sistema linguístico mais amplo.

Frege deu continuidade a seu projeto em duas outras obras: *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) e *As Leis Básicas da Aritmética* (vol. 1: 1893; vol.2: 1903). Nessas obras, um dos maiores legados de Frege foi ter efetivamente obtido uma definição de número com base em mecanismos bastante gerais de quantificação das proposições de uma linguagem.

No momento, porém, em que Frege preparava-se para publicar o segundo volume de sua *As Leis Básicas da Aritmética*, livro com o qual julgava coroar o trabalho de sua vida, e que já se encontrava no prelo, uma carta. a da Inglaterra chegou às suas mãos. Seu autor era o jovem filósofo inglês Bertrand Russell (1872-1970), e o conteúdo não poderia ser mais devastador. Russell apontava para Frege a existência de certas contradições lógicas em seu sistema; o suficiente para mostrar que o pensamento de Frege, da maneira como estava, não poderia se sustentar.

É interessante observar que Frege ainda teve tempo de inserir a carta de Russell – em uma atitude de grande coragem e honestidade intelectual – como apêndice ao segundo volume de sua obra. Do ponto de vista filosófico, contudo, nunca conseguiu recuperar-se do golpe sofrido.

A Consolidação da Lógica Moderna

Uma lógica simbólica

Ao contrário do que acontecia na lógica antiga, a lógica moderna tornou-se completamente simbólica.

É claro que Aristóteles, como vimos no curso de Lógica I, já havia introduzido o uso de letras em certas posições do enunciado, as quais funcionavam como variáveis. Apesar dessa importante percepção, porém, os conceitos e enunciados eram expressos, na lógica aristotélica, por meio de palavras da linguagem natural (grego português etc.). A idéia de construir um sistema artificial de linguagem jamais teria ocorrido aos pensadores antigos.

A lógica simbólica moderna, ao contrário, deixa de recorrer a palavras na construção de seus sistemas formais. Apenas símbolos são utilizados, para a construção de fórmulas com forma rigorosamente determinada.

Uma lógica aplicável à ciência

Ao contrário da lógica antiga, que se tornou crescentemente descolada das práticas científicas, a lógica moderna surgiu com o objetivo de fornecer uma ferramenta de uso bastante amplo nas ciências. Devido à sua complexidade formal e à sua capacidade de expressar uma grande riqueza de conteúdos (em particular conteúdos matemáticos), ela deveria permitir uma sofisticada análise conceitual das ciências, bem como a compreensão de sua estrutura dedutiva.

Uma lógica matemática

Temos aqui uma das principais diferenças entre a velha e a nova lógica. A primeira era essencialmente incapaz de lidar com enunciados matemáticos; o conceito de número lhe era totalmente estranho.
A segunda, ao contrário, teve como um de seus objetivos, desde o princípio, obter uma estrutura formal adequada a expressar os conceitos numéricos. De fato, a esperança inicial (frustrada, depois, em grande medida, pelo *teorema da incompletude* de Gödel) era desenvolver um sistema simbólico capaz de capturar toda a matemática clássica. Nessa concepção, a matemática passaria a ser vista como parte da lógica, ou como um ramo da lógica.

Funções e Variáveis

Sentenças com posições em aberto

Para iniciar nossa discussão, vamos tomar como exemplo sentenças da língua portuguesa. Esse procedimento deverá facilitar a compreensão do tema. Devemos lembrar, porém, que a lógica moderna é uma lógica completamente simbólica: no devido momento, as sentenças da língua portuguesa serão substituídas por fórmulas, ou seja, por certas combinações bem determinadas de símbolos.

Consideremos, então, a frase “Sócrates é mortal”. Podemos deixar um espaço em branco no lugar de “Sócrates”, para obter “_____ é mortal”. Nesse espaço em branco, agora, podemos inserir muitos outros símbolos (no caso, palavras ou nomes da língua portuguesa). Por exemplo, podemos inserir os símbolos “Platão” (1), “Santos Dumont” (2), “Zeus” (3) ou “quantidade” (4). Nos casos (1) e (2), obteríamos novas sentenças do português, ambas verdadeiras. No caso (3), também obteríamos uma nova sentença do português, só que falsa. O caso (4), porém, é bastante diferente: ao inserir a palavra “quantidade” no espaço em branco, obtemos uma seqüência de símbolos que não possui significado; não se trata, em outras palavras, de uma sentença do português.

Esse ponto é bastante importante. Em uma língua natural como o português, nem sempre é fácil dizer o que deve ou não contar como sentença significativa. Um caso como “Não Almeida quase bolachas”, embora posto apenas por palavras compreensíveis, certamente não constitui uma sentença. Já casos como aquele indicado logo acima, em que a palavra “quantidade” aparece no lugar do espaço em branco, embora aparentemente desprovidos de significado (contextos normais), podem ser vistos como significativos em contextos específicos (uso poético da linguagem, por exemplo). Em linguagens formais, ao contrário, as regras para construção de proposições são muito claras; o que conta ou não como proposição está perfeitamente determinado.

Existem sequências de símbolos, portanto, que não são admitidas como sequências significativas da linguagem. Como consequência, nem todo símbolo pode preencher, significativamente, um espaço deixado em branco.

(O mesmo ocorre com funções matemáticas, em que nem todo valor da variável é um valor permitido. Existem números que podem servir de valor para uma variável, e outros que não podem. Por exemplo: Se estamos trabalhando com uma expressão algébrica para calcular certa propriedade de um corpo em função de sua posição *x*, então essa posição pode ser dada por um número real, mas não por números complexos; ou ainda, se estamos trabalhando com números reais, e a expressão da função inclui a raiz quadrada da variável *x*, então a variável não pode assumir valores negativos.)

Ambiguidade das posições em aberto

Vejamos agora outra sentença: “Remo é irmão de Rômulo”. Pelo mesmo método já utilizado, podemos obter: “_____ é irmão de Rômulo” (a). Alternativamente, podemos obter “Remo é irmão de _____” (b); e, o que é ainda mais interessante, podemos obter “_____ é irmão de _____” (c). Os casos (a) e (b), como se vê, são perfeitamente análogos ao do exemplo anterior: podem-se inserir diferentes símbolos no espaço em branco (mas não *qualquer* símbolo).

O uso de variáveis

Para evitar esse tipo de ambigüidade, costuma-se assinalar os lugares deixados em aberto em uma expressão por meio de certos símbolos especiais da linguagem, chamados de “variáveis”. Assim, em vez de “____ é mortal”, escrevemos “*x* é mortal”, em que “*x*” é uma variável; e em vez de “Remo é irmão de ___”, escrevemos “Remo é irmão de *x*”.

Assim, estamos finalmente em condições de entender o que é uma “variável” (usamos variáveis desde o ginásio, no curso de matemática, mas poucos professores explicam a natureza lógica desses símbolos). A variável, tanto em matemática como em lógica, é um símbolo que funciona exatamente como espaços deixados branco em uma expressão, os quais devem ser preenchidos por alguma outra coisa. Nas expressões em que aparece, portanto, ela serve para assinalar certa posição livre, onde podem ser inseridos outros símbolos (símbolos *adequados* àquela posição).

Assim, é absolutamente errado dizer – como ainda hoje encontramos em alguns manuais – que a variável é um símbolo com “significado variável”. O que quer que seja um “significado”, ele não pode ser variável em um símbolo, sem que esse símbolo se torne outro símbolo. Esse tipo de afirmação, portanto, não passa de contra-senso, baseado em uma compreensão equivocada do que seja “significado”, e de como ele pode se constituir em sistemas formais. Em sistemas formais, a variável possui uma função bastante específica, que não custa repetir: indicar certo lugar deixado “vazio” na expressão, ou seja, um lugar que poderá ser preenchido por outros símbolos.**LÓGICA II 35UNIMES VIRTUAL**

O uso de diferentes variáveis

Mas e a ambigüidade da qual falamos no início da aula, como ela pode ser resolvida por meio da utilização dessas variáveis? Ora, é simples ver o que acontece. Tomemos como exemplo a sentença “Romeu ama Julieta”, a partir da qual obtemos a expressão em aberto “___ ama ___”. Vamos agora utilizar variáveis para expressar o que se passa. Ao fazer isso, duas opções se abrem. Podemos escrever “*x* ama *y*”; mas também podemos escrever “*x* ama *x*”. O resultado, para cada opção, é bastante diferente.

No primeiro caso, utilizamos duas variáveis distintas, e indicamos com isso que o preenchimento de cada espaço ocorre de maneira independente um do outro, ou seja, que cada um dos espaços *pode* ser preenchido com palavras diferentes (e apenas eventualmente com a mesma palavra, possibilidade que, nos sistemas usuais de lógica simbólica, *não* fica excluída). No segundo caso, utilizamos uma mesma variável para as duas posições em aberto e isso indica que ambas *devem* ser preenchidas com a mesma palavra.

Assim, é fácil ver que o significado de “x ama y” é bem diferente do significado de “x ama x”. Por exemplo: se dizemos que, para todo valor permissível de x (suponhamos seres humanos), vale que “x ama x”, estamos dizendo que toda pessoa ama a si própria (sentença com certo sabor narcisista). Por outro lado, se dizemos que, para todo valor permissível de x **e** para todo valor permissível de y, vale “x ama y”, então estamos dizendo que toda pessoa ama todas as outras pessoas, ou seja, que todo mundo ama todo mundo (sentença que afirma uma notável crença no altruísmo humano).
A situação, de resto, é perfeitamente análoga à prática comum em matemática. Na expressão “x2 + 3x”, a variável x, que aparece duas vezes, tem de ser substituída sempre por um mesmo número, por exemplo, pelo número 1 (“12 + 3.1”, que é igual a 4), ou pelo número 9 (“92 + 3.9”, que é igual a 108). Já na expressão “x2 + 3y” pode-se substituir x e y por números diferentes, como 2 e 3 (“22 + 3.3”, que é igual a 13) ou 0 e 5 (“02 + 3.5”, que é igual a 15); o que não

exclui, certamente, a possibilidade de substituí-las pelo mesmo número, digamos 1 e 1, como no caso anteriormente calculado.

As Proposições

A estrutura formal da proposição

Existem duas maneiras essencialmente distintas de indicar o que é uma proposição. Vamos compreender cada uma delas e a sua relação.

Como temos seguidas vezes insistido, a lógica moderna é uma lógica simbólica e completamente formalizada. Isso significa que, para caracterizar determinado sistema de lógica formal, devem ser fornecidas três coisas:

1) O conjunto completo dos símbolos que compõem seu vocabulário;

2) O conjunto completo de regras para montar proposições a partir desse vocabulário (regras de formação);

3) O conjunto completo de regras para permitir a dedução de proposições a partir de outras proposições (regras de transformação, de inferência, ou de dedução).

Desse ponto de vista puramente formal, portanto, “proposição” é tudo aquilo que as regras do conjunto 2 dizem ser proposição. Em outras palavras, são proposições de um determinado sistema formal todas as combinações de símbolos que atendem a certas exigências, estabelecidas por regras claras e inequívocas. Essa maneira de entender a situação é, por assim dizer, uma maneira construtivista: ela indica as regras para construir as proposições a partir do vocabulário de uma linguagem. A uma proposição, concebida desse modo, podem aplicar-se certos conceitos especiais: os conceitos de “verdade” e “falsidade”.

O significado da proposição

É possível, porém, ver a situação sob outro prisma, mais próximo da lógica tradicional e que nos permitirá entender os resultados da nova lógica como parte do projeto lógico *filosófico* que estudamos no curso de Lógica I. Uma linguagem, formal ou não, é sempre feita para comunicar alguma coisa. Para os propósitos da ciência, podemos, aparentemente, abstrair certas funções de comunicação social e emocional, para nos concentrar sobre a função descritiva da linguagem. Uma linguagem, nesse sentido, tem sempre o objetivo de permitir uma descrição do mundo.

Chamamos, então, de "proposição" de uma linguagem a qualquer combinação de símbolos dotada de um sentido declarativo (enunciativo) completo, ou seja, uma combinação de símbolos capaz de afirmar (declarar, enunciar) alguma coisa sobre o mundo. Outra maneira de expressar essa mesma orientação é considerar como proposição qualquer combinação de símbolos da qual se pode dizer que é "verdadeira" ou "falsa" (considerados, aqui, como conceitos primitivos).

Importante: O aluno não se deve deixar impressionar, assim, pelas diferenças de terminologia. A ideia de "proposição", como veículo de uma afirmação, ou seja, como portadora de um significado completo acerca do mundo, da qual se pode afirmar ou negar a verdade. É a mesma ideia de "enunciado" principalmente ao examinar a lógica aristotélica. O termo "proposição" é apenas um termo mais consagrado nas discussões de lógica moderna. Por outro lado, na lógica moderna, o termo proposição ganha um grau de determinação formal que certamente não possuía na visão tradicional.

Proposições e Objetos

Para entender o que se passa, podemos mais uma vez recorrer diretamente à matemática. Consideremos uma típica função aritmética: "3x + 5". Temos aí a variável x, que pode assumir como valor qualquer número natural; e, para qualquer desses valores permissíveis de x, resulta outro número natural. (Assim, por exemplo, para o valor 2 da variável, tem-se o valor 11 da função.) Um número, é óbvio, não é uma proposição. Mais do que isso: ele difere essencialmente de uma proposição. Para ver isso, basta retornar ao que dissemos na aula passada acerca das proposições.

De fato, um número não corresponde, por si só, a uma afirmação sobre o mundo, ou sobre qualquer domínio de objetos: a expressão de um número não constitui uma descrição de nada. Um número é um *objeto* – no caso, como veremos mais à frente em nosso curso, um *objeto lógico* – que pode aparecer dentro de uma descrição (dentro de uma proposição). Na verdade, é possível usar números para fazer descrições do mundo, mas é possível também que os próprios números sejam os objetos a respeito dos quais desejamos afirmar alguma coisa.

Vejamos um exemplo de cada caso. Quando dizemos “existem 81 senadores no Brasil” (ou, equivalentemente, “o número de senadores no Brasil é 81”), estamos usando um número (“81”) para fazer uma afirmação sobre o mundo, ou seja, para descrever certo domínio de fatos empíricos. Quando encontramos em um livro de aritmética a expressão “5 + 7 = 12”, esta**LÓGICA II 39UNIMES VIRTUAL** mos diante de uma afirmação a respeito dos próprios números. Em um caso como no outro, estamos diante de proposições.

Podemos agora pensar em construir funções proposicionais a partir das proposições dadas. Por exemplo: “existem x senadores no Brasil” (ou ainda: “existem 81 x no Brasil”) e “5 + x = 12”. Em ambos os casos, para diferentes valores da variável, resultam diferentes proposições, verdadeiras ou falsas, como “5 + 273 = 12”.

Como se vê, um caso como “5 + x = 12” é bem diferente de um caso como “3x + 5”. A primeira expressão é uma função proposicional, pois para cada valor de x resulta uma proposição – uma afirmação sobre determinado domínio de objetos (aqui, especificamente, sobre os números naturais) –, seja ela verdadeira ou falsa. No segundo caso, o mesmo não acontece. Chamamos a expressão, agora, de “função de objeto”, pois, para cada valor da variável, obtém-se certo objeto (aqui, números naturais).

Variáveis, constantes, proposições e objetos

Temos então algumas distinções fundamentais, que precisamos manter em vista para prosseguir o nosso estudo.

A primeira delas diz respeito ao vocabulário de uma linguagem formal. Nesse vocabulário existem certos símbolos especiais que são chamados de “variáveis”. Sua característica distintiva reside no fato de que eles não possuem, por assim dizer, “significado” próprio: quando aparecem em uma expressão qualquer, sua função é segurar uma posição em aberto, que poderá ser preenchida por outros símbolos. É um fato que a variável não possui um significado determinado, além do mais, comunica-se com a expressão no qual ela aparece. Uma expressão em que uma variável aparece *livre*, como nos exemplos que vimos, não é uma expressão com significado completo (na terminologia de Russell, a expressão não está *saturada*): ela é uma *função*, ou seja, uma expressão que só adquire significado completo após a substituição da variável por um símbolo com significado determinado (e de tal maneira que, para cada valor da variável, a expressão, como um todo, adquire um novo significado).

Por oposição às variáveis, existem símbolos com significado determinado. São as chamadas “constantes”. Essas constantes podem ser de vários tipos: constates lógicas, como “e”, “ou”, “não”, “existe”, “todo” etc.; constantes individuais, como “Sócrates”, “Santos Dumont”, “Padre Landell de Moura” etc.; constantes para predicados, como “mortal”, “arguto”, “narcisista” etc.; e ainda outros.

A segunda distinção importante, que devemos manter em mente, diz respeito às expressões (sequências de símbolos) de uma linguagem formal. Certas expressões especiais são *proposições* da linguagem. Do ponto de vista sintático formal, elas ficam caracterizadas por certas regras de formação; do ponto de vista semântico, elas correspondem a afirmações completas sobre o domínio de objetos do qual a linguagem está apta a falar, ou seja, elas permitem descrever esse domínio de objetos.

Outras expressões, porém, não são proposições: elas indicam os próprios *objetos* e não afirmações sobre esses objetos. Um objeto pode ser um símbolo individual, como “Sócrates”, mas também pode ser uma expressão composta, como “o professor de Platão” (temos aqui uma descrição definida, como veremos mais adiante).

Domínios de Objetos

Domínios de referência da linguagem

A nossa linguagem comum, cotidiana, é uma língua natural (no caso, o português) sobre a qual não costumamos impor nenhum limite quanto ao seu campo de aplicabilidade. Uma linguagem formal, ao contrário, é construída com o propósito mais específico de permitir a expressão e análise lógica de determinadas áreas do conhecimento, ou seja, para permitir que se fale a respeito de determinado conjunto de coisas: a respeito, mais precisamente, de um domínio específico de objetos.

Isso significa que, em relação a ela, podem-se impor limites mais ou menos claros de aplicabilidade. Ilustremos por meio de um exemplo o que estamos querendo dizer. Tome-se a proposição "*Para todo x*, *(vale que) x é mortal"*. (Observe que a expressão "x é mortal" não é uma proposição, apenas uma *função proposicional*; já a expressão que oferecemos acima constitui, ela sim, uma proposição, pois corresponde a uma descrição do domínio relevante de objetos, ou seja, faz uma afirmação a respeito desse domínio.) Pergunta-se: essa proposição é verdadeira ou falsa?

A resposta, obviamente, é: *depende*. Depende, mais especificamente, *do que* estamos falando. Se estivermos falando de seres humanos, ou mesmo de todos os seres do planeta terra (do ponto de vista da biologia), parece que a proposição em questão é verdadeira. Por outro lado, se estamos falando de seres de um modo geral, aí incluídos seres mitológicos e personagens de ficção, então a proposição parece falsa: "Zeus", nesse caso, seria um valor permissível para a variável x, e como Zeus não é mortal, a afirmação de que todos os x são mortais seria falsa.

Diferentes linguagens

O fato é que podemos pensar em linguagens aplicadas a diferentes domínios. Poderíamos ter uma linguagem para o domínio da mineralogia, em que os indivíduos fossem tipos de minerais, e as afirmações se sem a esse campo; ou então uma linguagem para a zoologia. Vale a pena examinar mais de perto o que acontece nesses casos.

Uma linguagem da zoologia, por exemplo, poderia ter como campo de re-ferência apenas as *espécies* animais, com certos predicados aplicáveis a ela; suas proposições típicas seriam algo como "A girafa é herbívora", "O canguru é carnívoro", "O leão é maior do que o rato" e "Para todo x, x é marsupial" –

sendo que, nesse último caso, os valores permissíveis para x seriam “girafa”, “canguru”, “leão”, “rato” e outras espécies animais.

Em linguagens como essa, é fácil entender o papel das constantes. Constantes individuais, por exemplo, introduzem certos indivíduos relevantes do domínio; constantes predicativas, certos predicados relevantes; constantes relacionais, certas relações relevantes; e assim por diante. Repare que, no exemplo acima, os indivíduos são *espécies* animais: “girafa” (não uma girafa especifica!), “canguru” etc. Correspondentemente, as propriedades (“herbívoro”, “marsupial” etc.) são propriedades das espécies, assim como as relações (“maior do que” etc.).

Seria também possível construir uma linguagem da zoologia que falasse de animais individuais. Seriam proposições típicas dessa segunda linguagem expressões como “Rim-tim-tim é um cachorro”, “Flipper é um golfinho”, “Para todo x, se x é elefante, então x é herbívoro” (a), “Elmer é maior do que Flipper”, “Para todo x e para todo y, se x é elefante e y é golfinho, então x é maior do que y” (b), etc. Aqui, as variáveis assumem como valor apenas animais individuais (“Rim-tim-tim”, “Flipper”, “Elmer” etc.), e não espécies. É por isso que, para fazer afirmações a respeito de espécies, precisamos usar fórmulas como (a) e (b). A fórmula (a) significa que os elefantes são herbívoros, e a fórmula (b) significa que os elefantes são maiores do que os golfinhos.
Não podemos dizer isso diretamente porque, nessa linguagem, “herbívoro” é um predicado individual que se aplica a indivíduos como “Elmer” e “Flipper”, mas não a espécies como “elefante”. De fato, as espécies são predicados de indivíduos – e não podemos aplicar um predicado de indivíduos a outro predicado de indivíduos.

Domínios e Nomes

Nomes disponíveis e indisponíveis

Suponhamos uma linguagem da zoologia apta a falar diretamente, como no primeiro exemplo da aula passada, das espécies animais. Isso significa que as variáveis individuais aceitam *espécies* como valor: na função proposicional “x é herbívoro”, x pode ser substituído por “elefante”, “ariranha” ou outras espécies.

Embora o número de espécies seja grande, temos nomes individuais para cada uma delas. As constates individuais dessa linguagem correspondem exatamente aos nomes das espécies. Acrescentamos algumas constantes para predicados que se julguem relevantes – tais como “herbívoro”, “mamífero” etc. – e, com base nesse vocabulário, tentamos construir uma teoria coerente.

Consideremos, agora, a segunda linguagem da zoologia que indicamos na aula passada. Essa linguagem foi concebida para falar de animais individuais. Isso quer dizer que suas variáveis individuais aceitam somente animais individuais (aqui, o conceito de “animal individual” é um conceito extra-lógico extraído da biologia ou, mais simplesmente, do puro bom senso) como valor: na função proposicional “x é golfinho”, x pode ser substituído por “Flipper”, “Boomer” etc. A situação é agora, porém, é um pouco diferente do que acontecia antes.

Embora o número de animais individuais (de todas as espécies) seja finito em um dado momento, nós certamente não dispomos de nomes para todos eles, e sequer é possível conceber a situação prática de uma linguagem que dispusesse, como constantes individuais, de nomes para todos os castores, antas, cobras, suçuaranas etc. existentes no mundo. Essa situação tem conseqüências interessantes.

Tomemos a função proposicional “x é herbívoro” (estamos considerando o predicado “herbívoro” como um predicado da linguagem, ou seja, como uma de suas constantes predicativas). O que podemos substituir no lugar da variável x? Para fazer a *substituição* e obter uma proposição individual, temos de efetivamente colocar algum símbolo da linguagem no lugar de x, ou seja, precisamos usar alguma das constantes individuais de que efetivamente dispomos. Isso quer dizer que podemos fazer afirmações individuais apenas acerca daqueles indivíduos para os quais temos nomes. Podemos falar que “Elmer” é herbívoro e que “Boomer” é herbívoro, mas não que certo animal, que não sabemos quem é, seja herbívoro. Ou será que podemos?

Considere agora a *proposição* (não mais função proposicional): “Para todo x, x é herbívoro”. O que significa essa proposição? Ela afirma, certamente, que Elmer e Boomer são herbívoros – mas não só isso. Ela afirma, de fato, que todos os objetos do meu domínio são herbívoros, e não somente aqueles objetos para os quais eu tenho um nome. Assim, embora eu não possa expressar diretamente que certo animal, para o qual eu não disponho de nome, é herbívoro, eu posso expressar indiretamente essa situação, se falo que todos os objetos do meu domínio são herbívoros.

Nomes e conjuntos infinitos

O exemplo acima pode parecer apenas acidental: afinal de contas, é possível imaginar (embora apenas como caso ideal) uma linguagem que possuísse nome para todos os animais da Terra, na medida em que os animais são em número finito. Pense agora, porém, nos próprios números e considere uma linguagem cujo propósito é justamente falar de números (ou seja, uma linguagem para fazer matemática). Podemos começar pensando nos números naturais: 0, 1, 2... Embora eles sejam infinitos, não é difícil ver que podemos ter (e de fato temos!) nomes individuais para cada um deles. O mesmo acontece com os números racionais (aqueles que podemos expressar na forma de frações de números naturais).

Sintaxe e Semântica

Dois estudos formais

O estudo sintático de uma linguagem é o estudo *interno* de suas seqüências de símbolos. A linguagem é vista como um sistema de regras para a composição de expressões complexas a partir de um vocabulário simbólico inicial; ao mesmo tempo, busca-se obter um sistema de classificação para essas expressões e tenta-se estabelecer certas relações entre elas.

Assim, a sintaxe de uma linguagem determina quais seqüências de símbolos são permissíveis, ou seja, quais seqüências constituem *expressões* significativas da linguagem (sejam essas expressões proposições, funções proposicionais, descrições definidas de objetos, funções de objeto etc.). Determina quais expressões são, especificamente, proposições. Determina quais proposições podem ser derivadas a partir de quais outras proposições; e assim por diante.

O estudo semântico é o estudo de como a linguagem, e em particular as proposições da linguagem, aplicam-se à *descrição* de certos domínios de objetos. Por isso, costuma-se dizer que o estudo semântico é o estudo do "significado" das expressões de uma linguagem: essas expressões, imersas a princípio em um jogo de regras sintáticas, ganham significado no momento em que consideramos a maneira como se referem a objetos, descrevendo sua organização.

Em particular, os conceitos de "verdade" e "falsidade" são tratados, com maior propriedade, como conceitos semânticos, na medida em que, aparentemente, somente uma descrição *de algo* – a interpretação de uma proposição como descrição de um domínio – pode ser dita verdadeira ou falsa.

A nova lógica simbólica, que ganhava seu formato mais bem acabado na virada do século XIX para o século XX, estabeleceu-se de início como uma lógica formal baseada em considerações sintáticas. Isso significa que, desde muito cedo, percebeu-se a possibilidade de formalizar completamente as regras sintáticas que constituem uma linguagem.

Foi necessário um pouco mais de tempo para que os estudiosos percebessem a possibilidade de formalizar, com igual rigor teórico, os estudos de semântica. De fato, a semântica formal viria a surgir somente na década de 1930, com os escritos do lógico polonês Alfred Tarski (1902-1983). Foi somente na década de 1950, porém, com os estudos do próprio Tarski e de seus discípulos que ela conseguiu firmar-se dentro de uma moldura suficientemente abrangente e precisa, conhecida como *teoria de modelos.*

A semântica dos quantificadores

Um dos pontos cruciais em que a distinção entre considerações sintáticas e semânticas aparece é no estudo dos quantificadores, como no caso da palavra “todos”, que introduz a chamada “quantificação universal”.

Do ponto de vista sintático, o que acontece? Uma linguagem típica (como no exemplo da aula anterior) dispõe de certo vocabulário simbólico no qual figuram constantes individuais e quantificadores, entre eles o quantificador universal “todos”. As constantes individuais permitem realizar afirmações individuais, como “Flipper é golfinho” (afirmação a respeito do animal individual designado pelo nome “Flipper”).

As regras sintáticas também informam que é possível formar, com a utilização da variável x, a *função proposicional* “x é golfinho”; e que, a partir desta, é possível obter uma nova *proposição* da forma “Para todo x, x é golfinho” (proposição, de resto, que será falsa, a não ser que o meu domínio de aplicação da linguagem envolva apenas uma população de golfinhos).

As regras sintáticas estabelecem ainda outras possibilidades. Estabelecem, por exemplo, que, se eu tenho a proposição “Para todo x, x é golfinho”, e se tenho uma constante individual “Blipper” no vocabulário da linguagem, então posso derivar a proposição “Blipper é golfinho” (se todos os indivíduos são golfinhos, e se disponho de um nome “Blipper” para certo indivíduo, então posso afirmar que “Blipper é golfinho”).

O fato importante a perceber é que as regras sintáticas dizem respeito sempre a possíveis combinações de símbolos disponíveis na linguagem. Se eu tenho as constantes individuais "Blipper", "Clipper", "Flipper" etc., então posso *formar* as proposições "Blipper é golfinho", "Clipper é golfinho", "Flipper é golfinho" etc. Posso também *derivar* todas essas proposições a partir da proposição universal "Para todo x, x é golfinho", na qual aparece o símbolo "todo".
Considerações a respeito do significado descritivo dessas sentenças, porém, fogem completamente ao âmbito sintático. Estamos nos movendo no plano puramente semântico quando estabelecemos um domínio de interpretação para a linguagem, e quando estabelecemos que o quantificador "todos" faz a variável abranger, do ponto de vista da descrição que ele permite daquele domínio, efetivamente todos os elementos do domínio, tenham eles nomes (sintáticos) ou não.

Variáveis Proposicionais e Valores de Verdade

Variáveis proposicionais

Já sabemos que uma função, do ponto de vista lógico, é uma expressão simbólica na qual aparece (ao menos) uma variável livre (aquela variável que não está "ligada" por um quantificador; estudaremos esse assunto mais adiante). Vamos agora introduzir alguma terminologia nova, apenas para facilitar futuras discussões.

A variável presente em uma função é também chamada de "argumento" da função. O elemento pelo qual ela é substituída em determinada situação é o "valor do argumento"; a classe dos valores que ela pode assumir compõe os "valores permissíveis para o argumento". A entidade sintática obtida após a substituição, em uma função, de sua variável (argumento) por um determinado valor do argumento chama-se "valor da função" para o correspondente argumento.

Vamos dar um exemplo, para ajudar a esclarecer e fixar essa terminologia. Seja a função "x é mortal". Essa função possui um único argumento, indicado pela variável x. Os valores permissíveis para o argumento são indivíduos, tais como "Sócrates" e "Platão". Ao se substituir o argumento pela constante "Platão", que é um de seus valores permissíveis, obtém-se "Platão é mortal". Nesse caso, dizemos que o valor do argumento é a constante "Platão", e o valor da função a proposição "Platão é mortal".

As chamadas *funções proposicionais*, então, são aquelas funções cujos valores são proposições. O importante, aqui, é o valor da função substituição do argumento por um valor para o *argumento*, obtém-se uma proposição). Desejamos considerar agora, para essas funções proposicionais, um caso especial: o caso em que os valores do argumento são, eles próprios, proposições. Essa possibilidade – que já havia sido vislumbrada, no período grego, pela escola estóica – fica garantida na lógica moderna pela adoção de variáveis específicas para proposições (variáveis que assumem proposições como valor), as chamadas "variáveis proposicionais". Denotaremos essas variáveis, daqui em diante, pelas seguintes letras minúsculas do alfabeto latino: *p, q, r...* (excepcionalmente, usaremos também as letras do começo do alfabeto).

Consideremos um exemplo. Seja a função "*p* e Sócrates é mortal". A variável *p* é uma variável proposicional; os valores permissíveis para o argumento são, portanto, outras proposições da linguagem, tais como "Platão é mortal", "Pitágoras é filósofo" etc. Tomemos como valor do argumento a proposição "Pitágoras é filósofo": o correspondente valor da função será a proposição "Pitágoras é filósofo e Sócrates é mortal". Temos, portanto, uma função proposicional (seu valor é sempre uma proposição), cuja classe de valores permissíveis para o argumento também são proposições.

Valores de verdade

Dissemos, na aula 03 da Unidade II, que uma proposição é uma expressão à qual se aplicam os conceitos de verdade e falsidade (do ponto de vista sintático, são uma classe de expressões compostas segundo certas regras formais, as “regras de formação” da linguagem). Introduziremos, também aqui, uma nova terminologia: Daqui para frente, diremos que toda proposição tem um “valor de verdade”. São apenas dois os valores de verdade existentes: “verdade” e “falsidade”. Quando uma proposição é verdadeira, dizemos que seu valor de verdade é “verdade”; quando é falsa, que seu valor de verdade é “falsidade”.

Considere-se então uma função proposicional, que tenha um argumento (não importa de que tipo). Existem três valores a respeito dos quais podemos falar: o valor do argumento, o valor da função, e valor de verdade do valor da função. Em “x é filósofo”, após a substituição do argumento por “Padre Landell de Moura”, temos: valor do argumento = “Padre Landell de Moura”; valor da função = “Padre Landell de Moura é filósofo”; valor de verdade do valor da função (da proposição “Padre Landell de Moura é filósofo”) = “falsidade”.
A questão dos valores de verdade será essencial nas próximas aulas, quando discutiremos uma importante classe de funções proposicionais: as funções de verdade.

Constantes lógicas

Existe uma classe de símbolos a que chamamos de “constantes lógicas”. Uma constante lógica é, como o nome indica, uma constante. Nesse sentido, opõem-se às variáveis. Ao contrário de outras constantes – que funcionam como nomes para indivíduos, predicados, relações e todo tipo de entidades que podem ser interpretadas em um domínio exterior à linguagem –, as constantes lógicas desempenham um papel bastante específico. Elas servem para caracterizar certas formas proposicionais.

Por exemplo: “existe” e “todos” são duas constantes lógicas (mais especificamente, *quantificadores* lógicos). Consideremos agora as duas proposições a seguir: “para todo x, x é mortal” e “existe um x, tal que x é mortal”. Ambas fazem uso dos mesmos elementos “interpretáveis”: uma constante predicativa (“mortal”), que pode ser interpretada, em um domínio qualquer, como uma classe de indivíduos (a classe dos indivíduos mortais); e uma variável individual, que assume indivíduos como valores (do ponto de vista sintático, todas as constantes individuais, ou seja, aqueles indivíduos para os quais dispomos de nomes; do ponto de vista semântico, todos os indivíduos do domínio). Apesar de compartilharem esses elementos, as duas proposições são distintas entre si, pois possuem formas distintas (a maneira de articular os elementos é diferente em cada caso). A distinção nas formas é evidenciada, justamente, pelo uso particular que cada uma faz das constantes lógicas.

Entre as constantes, devemos distinguir ainda uma classe importante: a classe dos “conectivos lógicos” (às vezes chamados de “operadores logicos”). Trata-se de certas constantes lógicas capazes de formar novas proposições a partir de outras proposições. Assim, por exemplo, são conectivos lógicos usuais palavras como “e” e “ou”. A partir de duas proposições como “Sócrates é mortal” e “Platão é mortal”, posso formar novas proposições como “Sócrates é mortal e Platão é mortal” **e** “Sócrates é mortal **ou** Platão é mortal”.

De maneira geral, a partir de duas proposições quaisquer p e q, é sempre possível formar novas proposições da forma “p **e** q” e “p **ou** q”.

Funções proposicionais de um tipo especial

Com o uso de variáveis proposicionais e constantes lógicas, podemos obter funções proposicionais do tipo que mencionamos na aula passada: funções proposicionais em que os valores dos argumentos são, eles próprios, proposições. É o caso do exemplo mostrado logo acima: “p **ou** q”. Aqui, há dois argumentos, indicados pelas variáveis proposicionais *p* e *q*. Tratando-se de variáveis proposicionais, sabemos que os valores dos argumentos devem ser proposições. Em outras palavras, tanto *p* como *q* devem ser substituídas por proposições. Após as substituições, o que se obtém é uma nova proposição.

Já sabemos que toda proposição deve ter um valor de verdade, “verdade” ou “falsidade”. Temos então a seguinte situação: Introduzimos proposições como valores dos *argumentos*, proposições estas que possuem valores de verdade; e obtemos uma proposição como valor *da função*, proposição esta que também possui um valor de verdade.
Pode-se perguntar: Do que depende o valor de verdade do valor *da função*? Será que em alguns casos ele depende apenas do valor de verdade dos valores dos *argumentos*, não importando a forma específica desses últimos? Quando respondemos positivamente a esta segunda pergunta, estamos diante das chamadas “funções de verdade”. Na próxima aula, esclareceremos melhor o que se passa.

Conectivos Lógicos

As tabelas de verdade

Considere uma função proposicional com n argumentos (na qual aparecem, portanto, *n* variáveis proposicionais). Desejamos tratar essa função como uma função de verdade. Isso significa que o valor de verdade do valor da função depende apenas do valor de verdade dos valores dos argumentos. Como temos *n* argumentos, e como cada valor de argumento pode assumir apenas dois valores de verdade – “verdade” (V) e “falsidade” (F) – existem 2n possibilidades. Para cada uma dessas possibilidades, devemos dizer se a função é verdadeira ou falsa.

Tomemos o caso com dois argumentos, indicados por duas variáveis proposicionais, *p* e *q*. São quatro as possibilidades: **1)** o valor de verdade do valor de p é “verdade” e o valor de verdade do valor de q também é “verdade”; **2)** o valor de verdade do valor de p é “verdade”, mas o valor de verdade do valor de q é “falsidade”; **3)** o valor de verdade do valor de p é “falsidade”, mas o valor de verdade do valor de q é “verdade”; 4) o valor de verdade do valor de *p* é “falsidade” e o valor de verdade do valor de *q* também é “falsidade”.

No diagrama abaixo, mostramos como funciona o caso geral. Seja f(a, b, c, ... , n) uma função de verdade com n argumentos, indicados por n variáveis proposicionais. Podemos representar f da seguinte maneira:

<u>a b c ... m n função **f**</u>

V V V V V F

V V V V F V

V V V F V V

V V V F F F

F F F F F V

Vejamos agora como compreender a tabela dada. Na primeira linha, temos o caso em que o valor de verdade para todos os valores dos argumentos é “verdade”. Olhando então para a última coluna vemos que, quando isso acontecer, o valor de verdade do valor da função **f** será “falsidade”. (Poderíamos ter escolhido “verdade”; essa outra escolha corresponderia à definição de uma outra função de verdade, digamos **g**) Em outras palavras: a função de verdade **f** é tal que, quando substituímos todas as suas variáveis por proposições verdadeiras, obtemos uma proposição falsa.

A interpretação das outras linhas – que, como sabemos, são em número de 2n – faz-se da mesma maneira. Esse caso geral, com *n* variáveis, é um pouco estranho e, felizmente, de rara utilização. Os casos realmente importantes apresentam apenas uma ou duas variáveis. É a eles que passamos agora.

A negação

A função proposicional "~*p*" (lê-se "não p"), de um único argumento, é chamada de "negação". O valor de verdade do valor da função é sempre o oposto do valor de verdade do valor do argumento. Em outras palavras: se no lugar de *p* colocamos uma proposição verdadeira, sua negação será falsa; se no lugar de p colocamos uma proposição falsa, sua negação será verdadeira. Podemos representar essa situação por meio da seguinte tabela de verdade:

p	~p
V	F
F	V

Assim, se no lugar de p colocamos a proposição "Sócrates é inteligente", temos que sua negação é "~Sócrates é inteligente". Se a primeira é verdadeira, a segunda é falsa; se a primeira é falsa, a segunda é verdadeira.

A conjunção

A função proposicional "*p . q*" (lê-se "p e q"), de dois argumentos, é chamada de "conjunção". O valor de verdade do valor da função só é "verdade" quando o valor de verdade dos valores dos dois argumentos é "verdade". Em outras palavras: Só obtemos uma conjunção verdadeira quando as duas proposições inseridas no lugar das variáveis são verdadeiras; se uma delas for falsa, a conjunção é falsa. Podemos representar essa situação por meio da seguinte tabela de verdade:

p	q	p . q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A disjunção

A função proposicional “*p* v *q*” (lê-se “p ou q”), de dois argumentos, é chamada de “disjunção”. O valor de verdade do valor da função só é “falsidade” quando o valor de verdade dos valores dos dois argumentos é “falsidade”. Em outras palavras: Obtemos uma conjunção verdadeira quando qualquer uma das proposições inseridas no lugar das variáveis é verdadeira; somente quando inserimos duas proposições falsas, a conjunção torna-se falsa. Podemos representar essa situação por meio da seguinte tabela de verdade:

p	q	*p* v *q*
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A implicação

A função proposicional “*p* ∩ *q*” (lê-se “*p* implica *q*”; diz-se que *p* é o “implicante” e *q* o “implicado”), de dois argumentos, é chamada de “implicação”. Deve-se ter cuidado especial em relação a ela, devido às diferenças que a versão lógico-formal apresenta em relação à sua contraparte lingüística usual. Vejamos o que acontece. O valor de verdade do valor da função só é “falsidade” quando o valor de verdade do valor do primeiro argumento é “verdade” e o valor de verdade do valor do segundo argumento é “falsidade”. Em outras palavras, a implicação entre duas proposições é sempre verdadeira, a não ser quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa. Isso está de acordo, certamente, com a nossa intuição: quando falamos que certa coisa implica outra, estamos dizendo que a verdade do primeiro traz consigo a verdade do segundo. Desse modo, se o implicante é verdadeiro, mas o implicado é falso, não houve implicação: a implicação é falsa.

Podemos representar a implicação por meio da seguinte tabela de verdade:

p	q	*p* ∩ *q*
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O que talvez pareça estranho são os casos em que o implicante é falso. Tomemos o caso em que uma proposição falsa implica uma proposição verdadeira, como em “Sócrates é imortal ∩ Sócrates é mortal” (a); ou então o caso em que uma proposição falsa implica uma proposição falsa, como em “Sócrates é imortal ∩ Platão é imortal” (b). De acordo com a tabela, tanto a implicação (a) como a implicação (b) são proposições verdadeiras. Isso estaria correto?

Na verdade, o problema reside em outro ponto. Justamente porque estamos tratando a implicação como uma função de verdade, não é necessário haver nenhuma relação de conteúdo entre implicante e implicado, como normalmente esperamos que haja (no uso comum da linguagem). Devido a essa circunstância, a situação pode parecer bastante estranha até mesmo no caso em que uma proposição verdadeira implica outra verdadeira, como em “Sócrates é mortal ∩ Santos Dumont é brasileiro”. A noção de “implicar” parece exigir que haja uma relação entre o que é afirmado na proposição que serve de implicante e o que é afirmado na proposição implicada.

No caso de uma função de verdade, porém, considerações acerca do conteúdo dos valores dos argumentos (ou seja, do conteúdo das proposições parciais) estão fora de questão. O que importa é somente o valor de verdade dos valores dos argumentos. Novamente, então, estamos diante de uma decisão. Seria possível construir outras funções de verdade. No caso da implicação – e já que a relação de conteúdo entre implicante e implicado não pode ser levada em conta – optou-se por considerar que seu aspecto decisivo, do ponto de vista dos valores de verdade, reside em que a verdade do implicante transmite-se ao implicado. Se o implicante é verdadeiro, o implicado também o deve ser. E somente no caso em que essa exigência é violada, a implicação como um todo é considerada falsa.

Assim, a implicação “Sócrates é imortal ∩ Narciso é belo” (implicante falso, implicado verdadeiro) recebe “verdade” como valor de verdade. O mesmo acontece com “Sócrates é mortal ∩ Narciso é belo” (implicante e implicado verdadeiros) e “Sócrates é imortal ∩ Narciso é feio” (implicante e implicado falsos). Somente a implicação “Sócrates é mortal ∩ Narciso é feio” (implicante verdadeiro, implicado falso) recebe ”falsidade” como valor de verdade. Porque Sócrates é, de fato, mortal (implicante verdadeiro), e se a implicação fosse verdadeira, então Narciso deveria ser feio, o que não ocorre.

A implicação, concebida dessa maneira, como função de verdade, é também conhecida como “implicação material”.

A equivalência

A função proposicional “p ≡ q” (lê-se “*p* é equivalente a *q*”), de dois argumentos, é chamada de “equivalência”. O valor de verdade do valor da função é “verdade” quando os valores de verdade dos valores dos dois argumentos forem iguais; caso contrário, é “falsidade”. Em outras palavras: Obtemos uma equivalência verdadeira quando as proposições inseridas no lugar das variáveis forem ambas verdadeiras ou ambas falsas; se uma for verdadeira e a outra falsa, então a equivalência é falsa. Podemos representar essa situação por meio da seguinte tabela de verdade:

p	q	p ≡ q
V	V	V
V	F	F

F V F

F F V

A Quantificação

Quantificação universal e existencial

Consideremos uma função proposicional na qual aparece a variável x, como “x é cientista”. Já sabemos que uma expressão desse tipo *não* é uma proposição. De fato, ela não tem significado completo: nem indica um objeto determinado, nem corresponde a uma descrição de certo domínio de objetos (uma afirmação a respeito desse domínio). Essa função proposicional fornece apenas uma moldura para o preenchimento de um significado, ou seja, fornece certa forma (incompleta; não-saturada) a partir da qual podemos obter proposições.

Um dos métodos para a obtenção de proposições, a partir de determinada função proposicional, é aquele que temos visto desde o início da Unidade II: Trata-se da *substituição* da variável por um símbolo adequado, ou seja, por um símbolo de significado completo pertencente a uma certa classe apropriada (os valores permissíveis para o argumento). No caso do exemplo acima, precisamos introduzir um símbolo que seja nome de um indivíduo, ou seja, uma constante individual. Assim, obtemos proposições como “Iberê Camargo é cientista” (falsa) e “Oswaldo Cruz é cientista” (verdadeira).

Outra maneira fundamental de obter uma proposição a partir de uma função proposicional é a *quantificação*, que começaremos a examinar agora. As duas quantificações usuais são a quantificação *universal* e a quantificação *existencial*. Elas correspondem, respectivamente, à idéia transmitida em português pela expressão “para todo” e “existe um... tal que”.

Considere, então, as seguintes duas expressões, obtidas a partir da função proposicional que estamos usando como exemplo: “Para todo x, x é cientista” e “Existe um x tal que, x é cientista”. Podemos ver que elas correspondem a afirmações bastante claras a respeito do domínio da variável x.

Não estamos mais propondo uma afirmação a respeito de um elemento ainda indeterminado, que só se tornará realmente uma afirmação quando tivermos substituído a variável pelo nome de um indivíduo; estamos realizando uma afirmação acerca do domínio de interpretação da linguagem como um todo.

Valores de verdade

Uma maneira fácil de entender o que se passa é indagar pela verdade da expressão, e ver se a indagação faz sentido. Consideremos novamente a função proposicional “x é cientista”, e suponhamos que alguém lhe perguntasse: Ela é verdadeira? Uma boa resposta seria: “Sei lá. Na verdade, não sei do que você está falando. Algumas pessoas são cientistas, como Oswaldo Cruz; outra, como Iberê Camargo, não o são. Não faz sentido perguntar se x é ou não cientista.” De fato, a pergunta pela verdade ou falsidade de “x é cientista” carece de sentido.

Consideremos agora a proposição “para todo x, x é cientista”, aplicada a certo domínio específico (podemos supor, por exemplo, que estamos falando a respeito de brasileiros ilustres). Ela é verdadeira? A pergunta faz sentido, e a resposta é bastante simples: Não. (Iberê Camargo, por exemplo, é um brasileiro ilustre que não é cientista).

Devemos ter sempre em mente, portanto, aquilo que temos dito desde a aula 03 da Unidade II: Apenas proposições são verdadeiras ou falsas, ou seja, apenas proposições recebem valor de verdade; e tudo o que recebe valor de verdade é uma proposição. Em particular, uma função proposicional nunca é verdadeira nem falsa.

Notação

Podemos indicar simbolicamente a quantificação universal por meio do uso de parênteses. Dada certa função proposicional **f** x, em que x é uma variável e **f** indica uma função proposicional fixa qualquer, que tenha x como variável, podemos formar: “(x) (**f** x)”, que é a notação simbólica para “para todo x, **f** x”.

A quantificação existencial é indicada com o auxílio do símbolo “ E ”. Dada certa função proposicional **f** x, com as mesmas condições anteriores, podemos formar: “(Ex) (**f** x)”, que é a notação simbólica para “existe um x tal que **f** x”.
(É interessante observar, aqui, o papel do símbolo “**f**”. Ele *não* é uma variável! Embora esteja designando uma função proposicional que não está especificada (pode ser qualquer função proposicional), ele atua como *constante*. Podemos ver isso de duas maneiras. Em primeiro lugar, “**f**” não desempenha, na linguagem que estamos construindo, a função que seria esperada uma variável: ele não pode ser substituído nem quantificado. Em segundo lugar – o que está obviamente relacionado ao primeiro ponto – ele sequer pertence ao vocabulário sintático da linguagem formal que estamos construindo. Ele apenas fornece uma maneira fácil de falar a respeito das funções proposicionais da linguagem. Em outras palavras, ele funciona como uma espécie de variável, mas não da nossa linguagem formal, mas sim da linguagem na qual estamos falando da gramática dessa linguagem formal.)

Variáveis livres e ligadas

Sabemos que uma variável é um símbolo que tem por função indicar certa posição em aberto em uma função proposicional: ela segura o lugar, por assim dizer, para que outros símbolos de significado sejam inseridos naquela posição. Na verdade, devemos especificar: essa é a função das variáveis *livres*. Mas o que acontece quando quantificamos uma função proposicional?

Para entender o que se passa, considere uma proposição universal como "(x) (x é cientista)", ou seja, "Para todo x, x é cientista". Veja, agora, se é possível fazer nela alguma substituição da variável por uma constante. Certamente não. Expressões como "Para todo Oswaldo Cruz, Oswaldo Cruz é cientista" – ou "Para todo x, Oswaldo Cruz é cientista", ou ainda "Para todo Oswaldo Cruz, x é cientista" – simplesmente não fazem sentido.

Após a quantificação, a variável não funciona mais como um símbolo que pode ser substituído. A proposição quantificada é uma proposição com significado completo. E seu significado é completo, não porque ela faça uma afirmação acerca de determinado elemento, inserido no lugar da variável, mas porque faz uma afirmação acerca do conjunto de elementos abrangidos pela variável. Após a quantificação, é como se a variável já houvesse sido substituída por todo esse conjunto de valores. Dizemos que a variável é uma variável *ligada*

É comum ouvir-se também que a variável, em uma expressão quantificada, é uma "falsa variável" (ou ainda "variável aparente"). Embora essa terminologia seja compreensível, não acreditamos que ela seja a mais adequada. Afinal de contas, como símbolo sintático pertencente ao vocabulário da linguagem, a variável ligada continua a ser uma variável. Ela simplesmente passa a desempenhar um papel diferente do que desempenharia se estivesse livre. Nesse sentido, podemos dizer que uma variável livre tem a função de segurar uma posição em aberto para a substituição por outros símbolos da linguagem (substituições sintáticas); já uma variável ligada tem a função de "varrer" certo domínio de objetos, de maneira a permitir a consideração simultânea de todo o conjunto de substituições possíveis por elementos daquele domínio (substituições semânticas).

Quantificação como conjunção e como disjunção

Essa situação pode ser facilmente visualizada em um domínio finito de in-divíduos (especificamente, vamos supor que temos nomes para todos esses indivíduos). Considere um domínio de interpretação composto apenas por três pessoas: Oswaldo Cruz, Cesar Lattes e Iberê Camargo. Todos eles possuem nomes na linguagem (obviamente, mas não *necessariamente,* “Oswaldo Cruz”, “Cesar Lattes” e “Iberê Camargo”).

Nesse caso, a proposição universal “(x) (x é cientista)” também pode ser representada da seguinte maneira: “Oswaldo Cruz é cientista . Cesar Lattes é cientista . Iberê Camargo é cientista”. Em outras palavras, a quantificação universal funciona como uma conjunção, em que a variável quantificada é efetivamente substituída por todos os seus possíveis valores, pois todos eles possuem representação sintática (nomes) na linguagem.

“Se recordarmos agora o significado dado ao símbolo”. por meio de sua tabela de verdade, será fácil ver que a conjunção acima não é verdadeira. (O fato de haver três sub-proposições na conjunção não deve criar dificuldades. Faça primeiramente a conjunção das duas primeiras proposições: essas duas proposições tornam-se uma única proposição. Faça agora a conjunção dessa nova proposição com a terceira. Em outras palavras: “a . b . c” é o mesmo que “{a . b} . c”. De maneira geral, qualquer que seja o número de proposições unidas em uma conjunção, a conjunção só será verdadeira se todas elas forem verdadeiras.) Assim, a conjunção acima só seria verdadeira se todas as três proposições que aparecem nela fossem verdadeiras. Como a proposição “Iberê Camargo é cientista” é falsa, a conjunção é falsa.

Já a proposição “(Ex) (x é cientista)” pode ser representada pela seguinte disjunção de três termos: “Oswaldo Cruz é cientista v Cesar Lattes é cientista v Iberê Camargo é cientista”. Pela tabela de verdade fornecida para a disjunção (pode-se tratar o caso com três termos do mesmo modo indicado acima), a disjunção será verdadeira se qualquer uma das três sub-proposições que a compõem for verdadeira. É o que acontece aqui: tanto “Oswaldo Cruz é cientista” como “Cesar Lattes é cientista” são proposições verdadeiras. Portanto, a disjunção é verdadeira.

As Tautologias

As tautologias constituem um tipo especial de função de verdade. Mais à frente, elas servirão de base à montagem do nosso sistema de cálculo proposicional.

Tabelas de verdade para expressões compostas

Nas aulas 04 e 05 desta unidade, vimos a maneira como é possível usar tabelas de verdade para definir certas funções de verdade especiais, chamadas de “conectivos” e designadas pelos seguintes símbolos (constantes lógicas): “~” (negação), “.” (conjunção), “v” (disjunção), “∩” (implicação) e “≡” (equivalência).

Com o auxílio desses conectivos e de variáveis proposicionais, podemos formar funções proposicionais mais complexas. Como os conectivos utilizados são funções de verdade, essas funções proposicionais mais complexas também serão funções de verdade: seu valor de verdade dependerá somente do valor de verdade do valor dos argumentos. Novamente, portanto, será possível expressar o seu comportamento por meio de tabelas de verdade. Vejamos agora como essas tabelas, para expressões compostas, podem ser montadas.

Tomemos a função proposicional “~p v q”. Repare, antes de mais nada, que essa função proposicional é diferente de “~{p v q}”. No primeiro caso, temos a negação de p em disjunção com q; no segundo, temos a negação da disjunção entre p e q. (Na ausência de colchetes que indiquem uma ordem específica, a negação adere sempre ao termo mais próximo.) Nessa função proposicional, temos dois argumentos, indicados por duas variáveis proposicionais: p e q.

Cada um delas irá assumir uma proposição como valor; e o valor de verdade de cada uma dessas proposições poderá ser "verdadeiro" (V) ou "falso" (F). Eis a situação:

p q ~p ~p v q

V V F V

V F F F

F V V V

F F V V.

Nas primeiras duas colunas, temos os possíveis valores de verdade para os valores de p e q. Como são quatro as possibilidades, necessitamos utilizar quatro linhas. Até aí, nada de novo: é exatamente o que acontecia nos casos que já vimos.

Na terceira coluna, agora, colocamos o valor de verdade dos valores de ~p. Pela tabela de verdade da negação (primeira tabela da aula 04), quando o valor de verdade do valor de p é "V", o valor de verdade do valor de ~p é "F"; e quando aquele é "F", este é "V". Comparando a primeira coluna (p) com a terceira coluna (~p), vemos que é exatamente isso o que acontece.

Finalmente, a quarta coluna traz a distribuição dos valores de verdade para a expressão desejada. Ela é composta a partir da terceira coluna (~p) e da segunda coluna (q), seguindo a tabela de verdade para a disjunção (aula 04). Consideremos, por exemplo, a primeira linha: nessa linha, temos ~p com o valor "F", e q com o valor "V". Na tabela de verdade da disjunção, essa situação corresponde à terceira linha (primeiro termo da disjunção falso, e segundo verdadeiro), e a tabela indica que a disjunção é verdadeira. Eis porque colocamos o valor de verdade "V" na primeira linha da tabela acima.

Pela tabela acima, portanto, a função de verdade “~p v q” só se torna falsa quando inserimos uma proposição verdadeira no lugar de p e uma proposição falsa no lugar de q.

Funções de verdade que são sempre verdadeiras

Consideremos agora a seguinte função proposicional composta: “q ∩{p v q}” (diferente de “{q ∩ p} v q”). Como sabemos, também ela será uma função de verdade. Vamos construir, assim como fizemos acima, sua tabela de verdade:

p q p v q q {p v q}

V V V V

V F V V

F V V V

F F F V

O fato notável que podemos extrair da tabela acima é que a função de verdade “q ∩ {p v q}” recebe sempre o valor de verdade “V”, independentemente do valor de verdade das proposições que colocamos no lugar de p e q. (De fato, uma implicação só é falsa, como sabemos, se o implicante é verdadeiro e o implicado é falso. Contudo, nas duas linhas em que o implicante (q) é verdadeiro – primeira e terceira linha –, o implicado (p q) também é verdadeiro.)

Proposições Primitivas do Cálculo Proposicional

A base do sistema

Como acontece com todo sistema de lógica formal dedutiva, o sistema de cálculo proposicional que estudaremos a seguir possui certo número de proposições primitivas (também chamadas de “axiomas”) e algumas regras de inferência (também chamadas de "regras de transformação" ou "regras de dedução"). As proposições primitivas são proposições que colocamos na base do sistema: elas são aceitas como proposições válidas da linguagem, sem que consideremos necessário demonstrá-las dedutivamente (ou seja, deduzi-las dentro do sistema). A partir delas, então, é que podemos deduzir as outras proposições válidas da linguagem, por meio das regras de inferência. Estas últimas são aquelas regras que permitem passar de certas proposições iniciais (tomadas como premissas) a outras proposições (as conclusões). Comecemos com as proposições primitivas do cálculo proposicional.

Como dissemos, essas proposições primitivas servirão de fundamento para todo o sistema. Temos de escolher proposições a respeito de cuja adequação como princípio para um sistema dedutivo nós estejamos, de algum modo, seguros. Dito de outra maneira é necessário encontrar proposições que, embora não sejam demonstráveis dentro do sistema dedutivo do cálculo proposicional, possam ser consideradas (logo de início) como formalmente verdadeiras.

Ora, já conhecemos uma classe de proposições a respeito de cuja verdade podemos nos assegurar pela simples consideração das tabelas de verdade: as tautologias. São essas tautologias que usaremos como proposições primitivas.

Proposições primitivas como tautologias

Considere a tautologia que examinamos na aula passada: "q ∩ {p v q}". Trata-se de uma função proposicional com a característica de resultar em uma proposição verdadeira para qualquer substituição possível das variáveis p e q. Não importa por qual proposição substituamos a variável p e a variável q na função "q ∩ {p v q}", a proposição obtida é sempre verdadeira. Podemos dizer, então, que "para todo p e para todo q, q ∩ {p v q}". Em símbolos: "(*p, q*) (q ∩ {p v q})". Ao quantificar sobre as variáveis livres *p* e *q*, transformamos a função proposicional "q ∩ {p v q}" em uma proposição, que é a nossa primeira proposição primitiva do cálculo proposicional:

PP1: (p, q) (q ∩ {p v q})

Às vezes, por questões de praticidade, e porque o contexto não permite que haja dúvida quanto ao significado da expressão, podemos usar uma notação que não traz a quantificação explícita:

PP1': q ∩ {p v q}

Aqui estão as outras proposições primitivas do nosso sistema de cálculo proposicional:

PP2: (p) ({p v p} ∩ p) PP2': {p v p} ∩ p

PP3: (p, q) ({p v q} ∩ {q v p}) PP3': {p v q} ∩ {q v p}

PP4: (p, q, r) ({q ∩ r} ∩ {{p v q} ∩ {p v r}}) PP4': {q ∩ r} ∩ {{p v q} ∩ {p v r}}

Essas são as quatro proposições primitivas que utilizaremos. A partir dela, todas as outras proposições do cálculo proposicional poderão ser deduzidas, por meio das regras de transformação que forneceremos na próxima aula. Uma coisa, no entanto, deve ter parecido estranha. Nas proposições primitivas acima, aparecem somente os símbolos de implicação é disjunção. Como, então, será possível deduzir proposições em que aparecem os outros conectivos? A verdade é que os conectivos lógicos podem ser definidos uns em termos dos outros (é possível fazer isso, aliás, de diferentes maneiras). Abaixo, suplementamos as definições necessárias, que serão suficientes para os nossos propósitos:

D1: p ∩ q =Df ~p q

D2: p . q =Df ~{~p ~q}

D3: p ≡ q =Df {p ∩ q} . {q ∩ p}

Aqui, tomamos como conectivos básicos, a partir dos quais todos os outros podem ser definidos, a negação e a disjunção. Podemos nos convencer da validade dessas definições ao escrever as tabelas de verdade para as expressões à direita do símbolo "=Df": constataremos, então, que elas são iguais às tabelas de verdade para os conectivos definidos.

As Regras de Inferência

As regras de inferência permitem derivar novas proposições a partir de proposições já estabelecidas. Dessa maneira, elas fornecem o mecanismo por meio do qual, a partir das proposições primitivas, torna-se possível demonstrar toda a série (em princípio infinita) de teoremas do cálculo proposicional.

As duas regras de inferência

As regras de inferência são prescrições do seguinte tipo: "A partir do conjunto A de proposições, é possível derivar o conjunto B de proposições". Na verdade, como estamos trabalhando com lógica formal, uma maneira um pouco mais rigorosa de expressar a mesma idéia seria: "A partir do conjunto A, composto por proposições de tal e tal forma, é possível derivar o conjunto B, composto de proposições de tal e tal forma".

Essas prescrições não são proposições da linguagem. Elas são regras de operação sobre a linguagem, que indicam as manipulações formais que podemos fazer para derivar proposições da linguagem a partir de outras proposições da linguagem.

As regras de inferência são duas:

RI1) **Regra de inferência por implicação:** A partir das proposições "p ∩ q" e da premissa "p", podemos inferir a proposição "q". Visto de outro modo: A partir do conjunto de proposições A = {p ∩ q, p}, podemos derivar o conjunto de proposições B = {q}.

Essa forma de derivação corresponde ao conhecido *modus ponens* da lógica tradicional e é bastante intuitiva. Ela segue aquilo que observamos a respeito da implicação: trata-se de um conectivo lógico que transmite a verdade do implicante ao implicado. Se uma implicação é verdadeira e se o implicante é verdadeiro, então o implicado deve ser verdadeiro. Essa regra corresponde à tautologia "{p . {p ∩ q}} ∩ q" (como exercício, construa a tabela de verdade para essa função proposicional e mostre que se trata de uma tautologia). No entanto, somente a regra de inferência permite efetivamente derivar uma nova proposição a partir das duas premissas dadas.

Regra de inferência por substituição: A partir de uma proposição universal, podemos derivar as seguintes proposições: RI2a) a proposição que se obtém pela substituição da variável quantificada por uma expressão que pertença aos seus valores permissíveis; RI2b) a proposição que se obtém pela substituição da variável quantificada por certa função cujos valores pertençam ao conjunto de valores permissíveis da variável substituída (nesse caso, a variável original é eliminada do quantificador universal e, no seu lugar, entram as variáveis da própria função).

Para entender o que se passa aqui, vamos dar um exemplo. Considere a proposição universal "(x, y) (x.y = y.x)" (para todo x e para todo *y*, x vezes *y* é igual a *y* vezes x).

O que RI2a afirma é que, a partir dessa proposição, podemos derivar proposições como "(x) (x.3 = 3.x)" (aqui, substituímos a variável y pela constante 3; a variável y desaparece do quantificador) e "7.5 = 5.7" (aqui, substituímos a variável x pela constante 7 e a variável y pela constante 5; ambas as variáveis desaparecem do quantificador e, como eram as únicas variáveis quantificadas, o próprio quantificador desaparece). Como vemos, também essa regra é bastante intuitiva: se uma afirmação vale para todos os valores permissíveis das variáveis, então vale para um desses valores em particular.

Teoremas do Cálculo Proposicional

Um primeiro teorema

Eis o primeiro teorema do cálculo proposicional que oferecemos para consideração:

TCP1: (p) ({p ∩ ~p} ∩ ~p). Esse teorema é o que permite a prova por absurdo. Seu significado não é difícil de perceber: se uma proposição implica a sua própria negação, então a proposição é falsa (ou seja, concluímos pela sua negação).

Vamos agora mostrar como pode ser feita a demonstração desse teorema, para que o aluno entenda como funciona o procedimento de demonstração em um sistema de lógica formal.

Pela definição D1, temos: p ∩ q =Df ~p v q (I)

Por PP2, temos: (p) ({p v p} ∩ p) (II)

Aplicamos então a regra de inferência RI2b à proposição II, substituindo a função ~p pela variável p (~p, como sabemos, é uma função proposicional de um argumento; como estamos utilizando a mesma variável p para indicar esse argumento, não é necessário mudar a variável do quantificador). Assim, obtemos:

(p) ({~p v~p} ∩ ~p) (III)

Se, na definição (I), usamos ~p no lugar de q, então obtemos:

p ∩~p =Df ~p v~p (IV)

Finalmente, pela substituição de IV em III, obtemos a proposição desejada, nosso teorema TCP1: (p) ({p ∩~p} ∩~p)

Esse teorema, assim como as proposições primitivas, é uma proposição universal. Isso significa que podemos substituir a variável, na expressão quantificada, por qualquer proposição que desejemos: a proposição obtida será uma proposição verdadeira. Sintaticamente, é exatamente isso o que permite a regra de inferência RI1, desde que disponhamos de um nome (uma constante proposicional) para a proposição que desejamos colocar no lugar da variável *p*.

Na aula 09, observamos que as proposições primitivas podem ser expressas, por uma questão de comodidade e para facilidade de visualização, sem que a quantificação apareça de maneira explícita. O mesmo pode ser feito em relação aos teoremas do cálculo proposicional. Seguindo essa convenção, o teorema TCP1 ficaria expresso, de modo muito mais claro, assim:

TCP1’: {p ∩~p} ∩~p

Outros teoremas

No que segue, vamos oferecer, sem demonstrações, alguns dos principais teoremas do cálculo proposicional. Todos eles serão escritos na versão abreviada, sem a quantificação, que fica aqui subentendida.

TCP2’: {p ∩ q} ∩ {~q ∩~p}.

Temos aqui a famosa “contraposição”: Uma implicação continua válida quando invertemos a ordem de implicante e implicado, trocando-os ao mesmo tempo pelas respectivas negações. Por exemplo: Se “João mora no Rio” implica “João gosta de praia”, então “João não gosta de praia” implica “João não mora no Rio”.

TCP3’: $\{\{p \cap q\} . \{q \cap r\}\} \cap \{p \cap r\}$.

Temos aqui a afirmação da transitividade da implicação.

TCP4’: $p \vee \sim p$

Esse é o famoso “Princípio do terceiro excluído” da lógica clássica, que nós já estudamos no curso de Lógica I.

TCP5’: $\sim\{p . \sim p\}$ 84

Aqui, outro princípio da lógica clássica que nós estudamos no curso de Lógica I: o “Princípio de não-contradição”. Vemos assim que esses dois importantes princípios clássicos permanecem válidos em nosso sistema de cálculo proposicional, e podem ser deduzidos a partir das proposições primitivas e regras de inferência dadas.

TCP6’: $\sim\{\sim p\} \equiv p$

Conhecido como “Princípio da dupla negação”.

TCP7’: $\sim\{p . q\} \equiv \{\sim p \vee \sim q\}$

Aqui, afirma-se a equivalência entre: não é verdade que p e q sejam ambas válidas; ou p ou q não é válida.

TCP8’: $\sim\{p \vee q\} \equiv \{\sim p . \sim q\}$

O caso é semelhante ao anterior. (Você consegue compreender seu significado?)

TCP9’: $\sim\{p \cap q\} \equiv \{p . \sim q\}$

Conhecido como “lei de De Morgan”: se não existe implicação entre p e q, é porque p é verdadeira e q é falsa; e vice-versa.

Predicados e Relações

Propriedades e relações

Temos trabalhado, desde a Unidade II, com o conceito de funções lógicas, e em particular de função proposicional. Ao considerar uma função proposicional específica **f** x, em que x é uma variável individual (em relação à utilização do símbolo "**f**", ver o final da aula 06 da Unidade III), temos a seguinte situação: Para alguns valores de x, a proposição é verdadeira; para outros, ela é falsa. Aqui, é bom fixar, estamos usando conceitos semânticos: quando falamos em valores para x, estamos nos referindo (na medida em que x é uma variável individual) aos indivíduos de certo domínio de interpretação.

Quando a função proposicional **f a** (onde **a** indica um valor permissível para x) é verdadeira, dizemos que ela é aplicável a **a**; caso contrário, que ela não se aplica a **a**. Vemos assim que uma função proposicional com um único argumento é a representação lógica de um predicado (de um conceito, de uma propriedade): trata-se de algo que pode ser aplicado ou não a um indivíduo.

Considere agora uma função proposicional com dois argumentos: **f** x y. Novamente, x e y assumem valores em certo domínio de interpretação da linguagem. A situação, agora, é assim: Para alguns pares ordenados {**a**, **b**} de elementos do domínio, a função proposicional torna-se verdadeira; para outros, falsa. Que os pares são ordenados (ou seja, a ordem dos elementos é essencial), é fácil de ver. Imaginem-se dois elementos a e b do domínio: é perfeitamente possível que f a b seja verdadeira, mas **f b a** seja falsa (Platão é professor de Aristóteles, mas Aristóteles não foi professor de Platão). Uma função proposicional com dois argumentos é a representação lógica, portanto, de uma relação binária, como algo que pode ou não aplicar-se a pares de indivíduos.

Do mesmo modo, uma função proposicional **f** x y z, com três argumentos, é a representação lógica de uma relação entre três indivíduos, ou seja, aplica-se ou não a triplas ordenadas {x, y, z} (por exemplo: "Ricardo estuda filosofia na Unimes"; "José estuda letras na PUC"; etc.). Podemos seguir assim indefinidamente, para funções proposicionais com quantos argumentos desejemos.

(Uma observação importante: Estamos falando em conceitos *individuais* e relações entre *indivíduos* pelo simples motivo de estarmos usando variáveis individuais, ou seja, valores cujos valores são indivíduos. Como veremos mais à frente, porém, isso não é necessário.)

Constantes predicativas e relacionais

Podemos introduzir, então, certa simbologia especial que ajudará a tornar clara a estrutura de proposições e funções proposicionais. "Constantes predicativas" (de primeira ordem) são símbolos que, combinados a constantes individuais, resultam em proposições; combinados a variáveis individuais, resultam em funções proposicionais. "Constantes relacionais" (de primeira ordem) são símbolos que, combinados a conjuntos ordenados (pares, triplas etc.) de constantes individuais, resultam em proposições; combinados a conjuntos ordenados em que ao menos um dos elementos é uma variável individual, resulta em funções proposicionais.

Para predicados constantes, usaremos conjuntos de letras iniciadas em maiúscula, por exemplo, "**Mort**" para mortal ou "**Fil**" para filósofo (note-se que "**Mort**" e "**Fil**" devem contar, cada um, como um único símbolo da linguagem); analogamente para relações constantes. Para indicar um predicado constante *qualquer* (ver aula 06 da Unidade III), usaremos as letras maiúsculas **P** e **Q** (se necessário, acompanhadas de um índice numérico: **P1, P2** etc.); para uma relação constante *qualquer*, as letras maiúsculas **R** e **S** (cada relação tem um determinado número de argumentos, que permanece fixo para aquela relação; podemos falar, por exemplo, em certa relação *binária* **R**).

Assim, suponhamos que, em uma linguagem LZ, voltada a falar de zoologia, *introduzimos* os predicados constantes "**Mam**" (para mamífero) e "**Herb**" (para herbívoros), bem como a relação binária constante "**Mpq**"**.** ("mais pesado que"). *Introduzimos* ainda uma série de constantes individuais: "**leão**", "**elefante**", "**sapo**" e outros. Serão proposições de LZ, então, expressões como "**Man[elefante]**", "**Mpq[leão, sapo]**" e "**Herb[leão]**" (as duas primeiras verdadeiras, pois o camelo é um mamífero e o leão é mais pesado do que o sapo; a terceira falsa).

Serão funções proposicionais da linguagem LZ expressões como "**Herb**[x]" e "**Mpq**[x, y]"; também será uma função proposicional a expressão "**Mpq**[leão, x]". Como a nossa linguagem dispõe de quantificação universal e particular, podemos formar ainda as seguintes proposições: "(x) (**Mam**[x])"; "(Ex) (**Herb**[x])"; "(x) ((Ey) (**Mpq**[x,y]))".

Lógicas de Primeira Ordem e de Ordens Superiores

Lógicas de primeira ordem

A linguagem LZ que utilizamos como exemplo nas duas últimas aulas, por ser uma linguagem concebida para descrever certo domínio não-lógico (o domínio da zoologia), possui algumas constantes individuais, assim como constantes predicativas e relacionais de primeira ordem (aplicáveis a indivíduos). Além dessas constantes não-lógicas e dos recursos do cálculo proposicional, ela possui apenas variáveis individuais e quantificação sobre essas variáveis.

As proposições, assim, assumem duas formas possíveis (regras de formação): 1) constantes de primeira ordem aplicadas a constantes individuais, como em "**Herb**[**elefante**]" (afirmações acerca de indivíduos particulares do domínio de interpretação da linguagem); e 2) expressões em que as variáveis individuais aparecem quantificadas, como em "(x)(**Mam**[x])" (afirmações acerca do conjunto de indivíduos do domínio de interpretação da linguagem).

Essas são as chamadas "proposições atômicas" do cálculo de predicados de primeira ordem. A linguagem dispõe ainda dos recursos do cálculo proposicional. Isso significa que, a partir de proposições ditas "atômicas" (aquelas formadas por meio das regras acima), podemos compor outras proposições mais complexas, ditas "moleculares", por meio do uso de co-nectivos lógicos; significa também que podemos usar variáveis proposicionais, e quantificar sobre essas variáveis. As regras de inferência são as mesmas do cálculo proposicional (RI1, RI2a e RI2b), e todos os resultados do cálculo proposicional (teoremas) continuam, portanto, válidos.

Se parássemos nesse ponto, teríamos o que chamamos de uma "lógica de primeira ordem" (uma linguagem da lógica de primeira ordem). Uma lógica desse tipo contrasta com certas lógicas de ordem superior, as quais são mais ricas em termos de poder de expressão (sistemas formais capazes de expressar, em princípio, uma maior riqueza conceitual). Assim, para entender por que adotamos essa qualificação – "de primeira ordem" –, a melhor coisa a fazer é perguntar: O quê, exatamente, uma linguagem como LZ não tem? O que falta a uma linguagem desse tipo?

A resposta é esta: A linguagem LZ possui apenas variáveis para indivíduos; ela não tem variáveis para predicados ou para relações. Em uma linguagem de primeira ordem, portanto, embora possam existir predicados e relações constantes de primeira ordem, a quantificação pode ser feita apenas sobre variáveis individuais. Isso significa que podemos falar apenas sobre a totalidade dos indivíduos de certo domínio de interpretação. Não podemos falar, por exemplo, acerca da totalidade dos predicados de indivíduos, nem (o que, sob certo ponto de vista, é o mesmo) sobre a totalidade dos conjuntos de indivíduos.

Eis uma maneira interessante de ilustrar a situação: Em uma linguagem de primeira ordem, é possível formular proposições como “Todos os homens são mortais”. No entanto, ela não possui recursos expressivos suficientes para formular a seguinte proposição: “Se dois homens têm todas as propriedades em comum, então eles são o mesmo homem” ou, o que é equivalente, “Para dois homens distintos, existe ao menos uma propriedade que os distingue”. (Essas proposições ecoam o famoso princípio lógico proposto já no século XVII por Leibniz, e que costuma ser expresso como “a identidade dos indiscerníveis e a indiscernibilidade dos idênticos”.)

Lógicas de ordem superior

De fato, a linguagem LZ, no que diz respeito a entidades de ordem superior (ou seja, entidades que não são indivíduos), contemplava apenas *constantes* predicativas e relacionais próprias da zoologia (**Herb**, **Mpq**...). Não havia variáveis para predicados ou relações. Vamos introduzir, então, variáveis desse tipo. Para predicados, usaremos os símbolos *P, P1, P2 ... Q, Q1, Q2 ...*; para relações, os símbolos *R, R1, R2 ... S, S1, S2 ...* . Com a introdução dessas novas variáveis, torna-se possível escrever funções proposicionais como “P(elefante)”. Trata-se de uma função proposicional porque, para cada predicado que substituímos pela variável para predicados *P*, obtemos uma nova proposição (por exemplo, “**Herb**[**elefante**]”).

Além disso, vamos permitir a quantificação sobre variáveis desse tipo. Esse é um fator essencial, pois agora podemos construir *proposições* como “(P)(P[**elefante**])”, ou seja, uma proposição que afirma que o indivíduo designado por “**elefante**” possui todas as propriedades.

Deixamos aqui a pergunta, a ser examinada mais tarde: “todas as propriedades” vistas de que ponto de vista? Do ponto de vista sintático ou semântico?

A introdução desses novos recursos expressivos – ou seja, a existência de variáveis para entidades de ordem superior (predicados e relações) e a possibilidade de quantificar sobre elas – corresponde à passagem de uma lógica de primeira ordem para uma lógica de ordem superior.

Por um lado, a importância desses novos recursos lógicos não pode ser subestimada. Apenas para dar um exemplo importante, a caracterização axiomática do conjunto dos números naturais (um conjunto absolutamente fundamental para a matemática e a ciência) só pode ser feita em uma lógica de ordem superior. De fato, para expressar o chamado "princípio de indução matemática" (ver aula 07 mais à frente), por meio do qual conseguimos "fechar" o conjunto dos números naturais e assim garantir sua unicidade, necessitamos da quantificação universal sobre uma variável para predicados de primeira ordem (na próxima aula, falaremos a respeito da hierarquia das ordens).

A Teoria de Tipos

A teoria dos tipos lógicos, proposta por *sir* Bertrand Russell no início do século XX como forma de solucionar certos paradoxos que ameaçavam a nova lógica nascente, tornou-se parte constitutiva de parcela substancial dos sistemas de lógica simbólica desenvolvidos desde então. Além disso, tornou-se referência obrigatória para todo trabalho posterior em lógica, mesmo entre aqueles pensadores que não a consideram uma teoria adequada para tratar dos principais problemas lógicos. Nesta aula, vamos falar um pouco a seu respeito.

Paradoxos lógicos

Em lógica, podemos oferecer definições para diferentes conjuntos. Algumas dessas definições farão uso de conceitos empíricos, por exemplo, "o conjunto dos animais mamíferos", "o conjunto dos animais mais pesados do que o elefante" etc. (retiramos esses exemplos, é claro, de nossa já familiar linguagem LZ). Outras definições utilizarão apenas vocabulário lógico, por exemplo, "o conjunto dos conjuntos de um único elemento", "o conjunto das relações intransitivas entre indivíduos", "o conjunto de todos os conjuntos" etc. (Em relação a esses três últimos exemplos, devemos observar que nenhum deles é um conjunto de indivíduos; essa escolha, como veremos, não foi à toa.)

Eis a idéia que parece estar por trás de todos esses exemplos: Escolhe-se uma propriedade, e constrói-se o conjunto de todas as entidades que apresentam aquela propriedade; certa entidade *pertence* ao conjunto se, e somente se, possui a propriedade que o define. Por outro lado, dada qualquer entidade (qualquer entidade definível na linguagem da lógica), ou ela pertence ao conjunto definido (satisfaz à propriedade que o define), ou ela não pertence ao conjunto definido (não satisfaz à propriedade que o define).

Considere agora a definição do seguinte conjunto T: "o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos". Pergunta-se: Será que T pertence a T? A pergunta, embora possa causar estranheza, é perfeitamente cabível. Afinal de contas, o conjunto T, pelo próprio fato de que foi logicamente definido, é uma entidade contemplada pela lógica. Além disso, como T é um conjunto definido por uma propriedade (a propriedade "não pertencer a si mesmo"), faz sentido perguntar, a respeito de qualquer entidade, se ela pertence ou não ao conjunto T. Portanto, parece que faz sentido perguntar: T pertence a T?

Como primeira tentativa, vamos supor que T, de fato, pertença a T. A propriedade que caracteriza os elementos de T, porém, é a propriedade de não pertencer a si mesmo. Assim, se T pertence a T, T possui a propriedade que caracteriza os seus elementos: T não pertence a T. Dessa maneira, mostramos que, se T pertence a T, então T não pertence a T. Trata-se do caso em que uma proposição implica a sua própria contradição; pelo princípio da não-contradição, devemos rejeitar essa proposição. (Veja na aula 11 da Unidade III, a expressão formal do princípio de não-contradição no cálculo proposicional: se uma proposição p implica sua negação ~p, então devemos deduzir a negação

~p. No nosso caso, a proposição T pertence a T implica sua negação; devemos deduzir, portanto, que T não pertence a T.)

Suponhamos, então, que T não pertence a T. Segue daí que T possui a propriedade que caracteriza os elementos de T, mais especificamente, a propriedade de não pertencer a si mesmo. Assim, como T possui a propriedade que caracteriza os elementos de T, concluímos que T pertence a T. Dessa maneira, mostramos que, se T não pertence a T, então T pertence a T: novamente, uma violação do princípio de não-contradição.

Somando-se o que ficou dito acima, então, chegamos à situação em que T pertence a T se, e somente se, T não-pertence a T (em linguagem simbólica: T[T] ≡ ~T[T]). Essa situação parece contrariar qualquer esperança de obter um sistema lógico adequado. Trata-se de um paradoxo lógico, a exigir o devido esclarecimento; mais especificamente, tornava-se necessário revisar os pressupostos subjacentes ao desenvolvimento dos sistemas de lógica simbólico-formal.

A teoria dos tipos de Russell

Russell, que apontou esse paradoxo como uma conseqüência necessária da concepção lógica de Frege (ver aula 04 da Unidade I), indicou também uma maneira de solucioná-lo. Para ele, o problema estava em supor que qualquer propriedade poderia definir um conjunto. Essa suposição, por sua vez, baseava-se na idéia de que toda propriedade poderia ser aplicada, significativamente, a toda entidade contemplada pela lógica.

Russell observou que esse não é um bom pressuposto para a lógica. Assim, ele observou que uma propriedade como "não pertencer a si mesmo" (assim como a propriedade "pertencer a si mesmo") não deveria poder ser formulada em um sistema de lógica, pois acabaria por gerar, inevitavelmente, paradoxos do tipo apontado acima.

As regras fundamentais da teoria de tipos

O essencial, na hierarquia de predicados que oferecemos na aula passada, reside nos seguintes fatos:

1) Todo predicado possui um único tipo lógico (ou seja: não há predicados que não sejam de alguma ordem, nem predicados que sejam de mais de uma ordem);

2) Cada tipo de predicado só pode receber um único tipo de argumento, mais especificamente, argumentos de ordem imediatamente inferior à sua.

A classificação em tipos lógicos, além do mais, estende-se às variáveis. Há variáveis para cada tipo de predicado: além das variáveis para indivíduos, variáveis para predicados de primeira ordem, variáveis para predicados de segunda ordem etc. Uma variável para predicados de ordem *n*, então, só pode ser substituída por um predicado de ordem *n*. Devido a essa característica, uma variável de ordem n é vista como um símbolo de ordem *n*, ou seja, a variável tem o mesmo tipo lógico dos elementos pelos quais pode ser substituída.

Para ilustrar o que estamos falando, um predicado de segunda ordem pode aplicar-se *apenas* a um predicado de primeira ordem ou a uma variável para predicados de primeira ordem: não pode aplicar-se nem a indivíduos, nem a predicados de segunda ordem, nem a qualquer outra coisa que não seja um predicado de primeira ordem. Da mesma maneira, um predicado de ordem 22 pode aplicar-se tão-somente a um predicado de ordem 21 ou a uma variável para predicados de ordem 21, e a nada mais.

Essas determinações da teoria de tipos passam a figurar na base da sintaxe da linguagem. Somente são expressões significativas da linguagem aquelas expressões que combinam adequadamente os símbolos, do ponto de vista de seu tipo lógico. Como caso particular, as proposições estão sujeitas à mesma restrição. Uma expressão que não combine adequadamente seus símbolos, do ponto de vista dos respectivos tipos lógicos, não pode ser uma proposição: ela não é nem verdadeira nem falsa, simplesmente carece de sentido.

Podemos entender agora como a teoria de Russell resolve o paradoxo lógico apontado na aula passada. Aquele paradoxo apoiava-se na utilização da seguinte propriedade: "não pertencer a si mesmo". Do ponto de vista de um sistema lógico com que segue as regras de tipo, porém, uma propriedade como essa jamais poderá ser definida. Ela não corresponde a nenhum possível predicado da linguagem.

Sintaxe e Semântica dos Tipos

Regras de tipo e sintaxe

Do ponto de vista das *regras de formação* da linguagem, portanto, isso significa que são expressões significativas da linguagem somente aquelas combinações de símbolos que respeitem as regras de tipos. Por exemplo, se **P** é um "predicado aplicável a predicados de indivíduos" (portanto, do tipo lógico "((0))"), a expressão "**P**[**Q**]" só será uma proposição da linguagem se **Q** for um "predicado de indivíduos" (portanto, do tipo lógico "(0)").

Isso vale também para as variáveis. De fato, ao colocar uma variável para assinalar a posição do argumento em determinada função, fica subentendido que a variável é do tipo adequado àquela função. Por exemplo, se **P** é o mesmo predicado do parágrafo anterior, então a variável Q, na expressão "**P**[Q]", tem de ser uma variável de tipo adequado, ou seja, uma variável para "predicados de indivíduos" (portanto, do tipo lógico "(0)"). O que caracteriza uma variável assim, como seria de se esperar, é que ela só pode ser *substituída* por elementos do mesmo tipo que ela – no caso, por predicados de indivíduos.

Ao falar em substituição, já entramos no campo das *regras de inferência* da linguagem. Em particular, as regras de tipo determinam o exato escopo das regras de substituição RI2a e RI2b: qualquer variável possui um tipo lógico; e ela só pode ser substituída por símbolos do mesmo tipo lógico que ela (RI21) ou por funções cujos valores tenham o mesmo tipo lógico que ela (RI2b). Assim, a partir da proposição "(Q) (**P**[Q])" (proposição que não existe em um cálculo de predicados de primeira ordem, mas perfeitamente possível em cálculos de ordem superior!), posso derivar por meio das regras de inferência RI2 apenas proposições como "**P**[**Q**]", "**P**[**Q1**]", "**P**[**Q2**]" etc., em que **Q**, **Q1**, **Q2** são sempre predicados do tipo adequado.

A semântica dos tipos

Entramos agora em um assunto bastante delicado. Nas aulas 06 e 07 da Unidade II, vimos como interpretar, semanticamente, quantificadores para variáveis individuais. Em particular, vimos que uma proposição como "(x) (**P**[x])" afirma o predicado **P** de todos os indivíduos pertencentes ao domínio de interpretação da linguagem e não somente daqueles indivíduos que possuem nomes na linguagem. (De fato, não é necessário que todos os elementos de um domínio tenham representação sintática em certa linguagem; é perfeitamente possível que alguns deles não sejam designados por constantes individuais, ou até mesmo que nenhum deles o seja.)

A situação fica um pouco mais complicada quando se trata de variáveis para entidades de ordem superior. Para tornar mais clara nossa discussão, vamos nos concentrar sobre variáveis para predicados de primeira ordem (predicados de indivíduos); os outros casos, então, seguirão com facilidade.

Considere uma proposição como "(P) (**Q**[P])", em que **Q** é um predicado de segunda ordem e *P* é uma variável de primeira ordem, ou seja, uma variável para "predicados de indivíduos". O que essa proposição afirma? Ora, ela afirma que certa propriedade indicada por **Q** vale para todos os predicados de indivíduos. Mas o que devemos entender por todos os predicados de indivíduos?

Para entender o que se passa, vamos pensar no significado de um predicado específico para indivíduos. Esse predicado é designado por uma constante predicativa da linguagem, digamos, por **P1** (trata-se de um predicado como o predicado "**Herb**" da linguagem LZ). Dado qualquer indivíduo do domínio D da linguagem, ou **P1** aplica-se a esse indivíduo, ou **P1** não se aplica a esse indivíduo. Assim, podemos formar certo conjunto de indivíduos do domínio D, que contém exclusivamente aqueles elementos de D aos quais **P1** se aplica. Chamemos esse conjunto de "**P1**(D)".

Qualquer domínio de indivíduos pode ser pensado como um conjunto de elementos. (O domínio padrão que nós introduzimos para a linguagem LZ era o conjunto de todas as espécies animais conhecidas; cada elemento desse domínio, ou seja, cada indivíduo referido pela linguagem, como "**elefante**" ou "**sapo**", era uma espécie animal.) O domínio D, nesse sentido, é um conjunto de elementos; e **P1**(D) é um subconjunto de D (todos os elementos de **P1**(D) são elementos de D; mas nem todo elemento de D é, necessariamente, elemento de **P1**(D)). Vemos assim que qualquer predicado de uma linguagem, como **P1**, corresponde a um subconjunto de elementos do domínio.

Quando uma proposição se refere, por meio da quantificação sobre uma variável para predicados individuais, a "todos os predicados individuais", ela está fazendo uma afirmação, portanto, acerca de todos os subconjuntos de elementos do domínio. Assim como acontecia para os indivíduos, desses subconjuntos de elementos do domínio, nem todos terão nomes na linguagem. Em outras palavras, nem todos serão representados por constantes predicativas da linguagem e é possível que muitos não sejam sequer definíveis logicamente por meio dos recursos da linguagem. (Aliás, no caso de domínios infinitos, podemos mesmo provar que é impossível ter uma definição para cada subconjunto do domínio.) Isso não impede, no entanto, que todos esses possíveis subconjuntos sejam abrangidos na *interpretação* da quantificação (na consideração de seu significado como instrumento de descrição do domínio).

Lógica e Matemática

Uma das grandes diferenças da lógica moderna em relação à lógica antiga reside, como já sabemos, em sua capacidade de tratar de conceitos matemáticos. Com isso, no entanto, podemos querer dizer duas coisas diferentes: sua capacidade de descrever logicamente conjuntos de números, e sua capacidade de definir logicamente o próprio conceito de número. Vamos examinar esses dois aspectos de sua utilização.

Os números naturais

Quando falamos na descrição lógica de conjuntos numéricos, estamos pensando na função da lógica de descrever domínios específicos, com vistas a apreender sua estrutura. Aqui, portanto, os conjuntos numéricos aparecem como domínios de interpretação de certa teoria axiomática formulada em linguagem lógica.

Pensemos, por exemplo, no conjunto dos números naturais: 0, 1, 2... Aqui, esse conjunto numérico é visto como algo previamente dado, para o qual buscamos uma descrição lógico-formal adequada (que possibilite, entre outras coisas, a dedução segura de teoremas verdadeiros a seu respeito). Trata-se de um conjunto de infinitos elementos, entre os quais existe uma ordenação específica: o número 0 é o primeiro elemento, depois dele vem o número 1, depois o número 2, e assim por diante. O que caracteriza o conjunto dos naturais é justamente essa ordem.

Tentemos captá-la, então, por meio de um sistema axiomático escrito na linguagem lógica do cálculo de predicados. Já sabemos que um sistema axiomático caracteriza-se pela introdução de um vocabulário específico – constantes individuais que funcionam como nomes para certos elementos do domínio a ser descrito, bem como constantes para predicados e relações – e pela adoção de certas proposições fundamentais (axiomas), com base nas quais deve ser possível deduzir proposições verdadeiras acerca daquele domínio.

Surge aqui a primeira pergunta interessante: Qual o vocabulário que precisamos introduzir para descrever os números naturais? Pense no exemplo do cardume de peixes, dado no final da aula 07 da Unidade II. Ali, não era necessário haver nome para nenhum dos peixes, pois muito provavelmente não estaríamos interessados em fazer afirmações acerca de nenhum peixe em particular. O conjunto dos números naturais, nesse sentido, é bem diferente de um cardume de peixes. Para descrevê-lo adequadamente, devemos poder fazer afirmações a respeito de cada número em particular. Por exemplo, devemos pode dizer que o número 7 vem depois do número 4, mas antes do número 324. Devemos poder introduzir certa operação, a operação de adição entre números naturais (“+”), e dizer que “3 + 5 = 8”.

Isso poderia nos levar a pensar que seria necessário introduzir nomes, sob a forma de constantes individuais, para todos os números naturais. Embora essa nomeação fosse possível (por exemplo, da maneira trivial, adotando os nomes “0”, “1”, “2”...), tal opção inviabilizaria a construção de um sistema adequado de axiomas: seria necessário adotar infinitos axiomas, um para cada constante introduzida, com o objetivo de especificar sua posição na série.

Felizmente, é possível utilizar uma única constante individual, a constante **0**, que servirá de nome para certo elemento privilegiado do domínio (como sabemos, para o número 0, que é o primeiro número na série dos naturais). Precisamos, além disso, introduzir uma constante relacional, a constante “**Suc**”, que representa uma relação entre números naturais (a relação de "sucessor", que existe entre 3 e 4, entre 11 e 12, entre 783 e 784 etc.). A idéia é caracterizar os diferentes números por meio de sua relação com o número representado pela constate **0**: o número 1 será indicado na linguagem como aquele número que é o sucessor de 0, o número 2 como aquele número que é o sucessor do sucessor de zero, e assim por diante.

O sistema axiomático de Peano

Em 1889, o grande lógico e matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) desenvolveu um sistema simples de axiomas capazes de descrever a estrutura dos números naturais. Seus axiomas, como dissemos, fazem uso de uma constante individual, a constante **0**, e de uma constante relacional binária, a constante **Suc** (do tipo (0,0), ou seja, do tipo "relação entre indivíduos"). (Na verdade, Peano não formulou seus axiomas da exata maneira que mostraremos abaixo, mas de uma maneira equivalente a ela.)

Além disso, veremos aparecer nesses axiomas o símbolo de igualdade "=". Esse símbolo pode ser definido, no cálculo superior de predicados, como um símbolo puramente lógico (embora haja controvérsia a respeito dessa maneira de compreendê-lo). Ele também pode ser introduzido, como faz Peano, por meio de outra constante relacional do tipo (0,0), a constante "**=**". Essa constante é regida por axiomas específicos. Abaixo, em vez de escrever "=(**a**, **b**)", escreveremos "**a** = **b**", que é a visualmente mais familiar:

A1: (x) (x = x) A igualdade é reflexiva

A2: (x, y) ({x = y} ≡ {y = x}) A Igualdade e simétrica.

A3: (x, y, z) ({x = y . y = z } ∩ {x = z}) A igualdade é transitiva

Traduzidos para a nossa notação, então, os axiomas de Peano para o conjunto dos números naturais podem ser parafraseados assim:

AN1: ~(Ex) (Suc(x, **0**))

“Não existe x tal que **0** seja sucessor de x”. Esse axioma estabelece que o número 0 não é sucessor de nenhum outro número, ou seja, é o primeiro na seqüência dos naturais.

AN2: (x) ((Ey) (**Suc**(x, y) . (z) (**Suc**(x, z) ∩ z = y)))

“Para qualquer x, existe um y que é seu sucessor e tal que, para qualquer z, se z é sucessor de x, então z = y”. Esse axioma estabelece que todo número tem um sucessor, e que esse sucessor é único. Podemos designar esse único sucessor de cada número, portanto, por meio de uma função de objeto **S**: **S**[x] designa o sucessor de x. (A definição explícita da função S é: {S[x] = y} ≡ {Suc(x, y)}.)

AN3: (x) (~Suc(x, x)); equivalentemente: (x) (~{**S**[x] = x})

“Para todo x, não é verdade que x é sucessor de x”. Esse axioma estabelece que nenhum número é o sucessor de si mesmo.

Os dois últimos axiomas bastam para mostrar que os números naturais são infinitos.

AN4: (x, y) ({x = y} ≡ {**S**[x] = **S**[y]})

Esse axioma diz que dois números quaisquer são iguais se, e somente se, seus sucessores são iguais. É importante assinalar a dupla direção da implicação: se dois números são iguais, então seus sucessores são iguais; se dois números têm sucessores iguais, então eles próprios são iguais.

Finalmente, temos o axioma para o princípio da indução matemática:

AN5: $(P)\ (\{\ P[\mathbf{0}]\ .\ \{P[x] \cap P[\mathbf{S}(x)]\}\ \} \cap \{(x)\ (P[x])\})$

Formulação lógica dos conceitos matemáticos

O desenvolvimento dessa abordagem deve-se, primeiramente, ao filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925), que teve a idéia fundamental que permitiu a definição lógica do conceito de número natural. Já o pensador que desenvolveu plenamente essa linha de fundamentação da matemática foi, como sabemos, o filósofo inglês Bertrand Russell (1872-1970).

Não teremos ocasião, em nosso curso, de examinar a maneira como é levada adiante essa abordagem. Ela exige o desenvolvimento de um aparato lógico-conceitual relativamente complexo, que teria de ser realizada de maneira bastante detalhada. O mais importante, porém, para os propósitos do nosso estudo, é apontar suas principais características.

Em primeiro lugar, a definição lógica dos números naturais é feita por meio do aparato puramente lógico da linguagem do cálculo superior de predicados. Em outras palavras, ela não demanda a introdução de nenhuma constante: nem de constantes individuais, nem de constantes de outros tipos lógicos. Isso significa que ela é feita em uma linguagem que não dispõe de nomes para nenhum elemento específico: utiliza somente variáveis, quantificação sobre variáveis, e conectivos lógicos (tratados por meio de funções de verdade). Essa definição lógica dos números naturais, que tem o grande mérito de esclarecer o uso de conceitos numéricos à descrição de fatos diversos (como aqueles mencionados no início desta aula), permanece até hoje como um feito notável da lógica simbólica, independentemente da posterior frustração de algumas de suas esperanças mais profundas (ver abaixo).

Como conseqüência dessa abordagem, além disso, não há a necessidade de se acrescentar nenhum axioma específico para o desenvolvimento da teoria numérica: apenas as proposições primitivas do cálculo de predicados são utilizadas. Essas proposições são, todas elas, proposições tautológicas, no sentido examinado na aula 08 da Unidade III: proposições necessariamente (logicamente) verdadeiras, em virtude exclusivamente de sua forma, para qualquer domínio. Mais ainda, todas as proposições deduzidas a partir delas por meio das regras lógicas de inferência (os teoremas da matemática) podem ser vistas, igualmente, como proposições tautológicas.

Desse modo, a matemática passa a ser vista como uma teoria puramente tautológica. Isso significa que as proposições matemáticas não possuem conteúdo descritivo: elas não afirmam algo que pode ser verdadeiro ou não em um domínio. Elas afirmam relações necessárias entre entidades lógicas. Em outras palavras, a matemática não é uma ciência do mundo; ela fornece um sistema conceitual, sofisticado e bastante poderoso, para falar a respeito do mundo. A matemática, nesse sentido, faria parte da gramática da linguagem – bem entendido, de uma linguagem lógica suficientemente precisa e devidamente formalizada.

Esperanças e frustrações do logicismo

A esperança da escola de Frege e Russell, chamada de "escola logicista" de fundamentação da matemática, era a seguinte: Obter, em uma linguagem lógica plenamente formalizada como a do cálculo superior de predicados, toda a matemática clássica (a matemática padrão desenvolvida até aquela época: cálculo superior e análise matemática, álgebra superior, topologia etc.). Dito de outra maneira, sua esperança era desenvolver um sistema de lógica formal que permitisse: 1) a definição de todos os conceitos matemáticos relevantes, a começar pelo conceito de número; 2) a dedução sintático-formal (por meio das regras de inferência da linguagem, aplicadas às proposições primitivas da linguagem) de todas as proposições verdadeiras envolvendo esses conceitos.

(Podemos observar, aqui, que os axiomas de Peano podem ser todos reproduzidos na linguagem puramente lógica do cálculo superior de predicados. De fato, essa linguagem é capaz, por meio de definições adequadas, de obter um *modelo* sintático para os números naturais, com uma constante *lógica* equivalente à constante individual **0**, uma constate lógica equivalente à constante relacional **Suc**, e assim por diante.)

Essas esperanças, que por um momento pareceram plenamente justificadas, foram fortemente abaladas no início da década de 1930, quando o jovem lógico tcheco-alemão Kurt Gödel (1906-1978) deu ao mundo seu famoso teorema de incompletude, no artigo “Sobre proposições formalmente indecidíveis dos *Principia Mathematica* e de sistemas afins”. No artigo, Gödel mostrou a existência de certas proposições verdadeiras a respeito dos números naturais que o sistema formal dos *Principia Mathematica* (a obra fundamental de Russell) não conseguia derivar como teoremas: no sistema dos *Principia*, tais proposições permaneciam *indecidíveis*, ou seja, nem elas nem suas negações podiam ser formalmente provadas.

O teorema de Gödel, porém, conseguia fazer algo ainda mais profundo. Ele mostrava que a deficiência apontada não era um problema particular do sistema de Russell, de modo que este pudesse ser remendado pelo acréscimo, quem sabe, de alguma nova proposição primitiva. O resultado de Gödel estabelecia que qualquer sistema do tipo do de Russell (os tais sistemas “afins”), dotado de regras finitas (em um sentido bem amplo da palavra “finito”), incorreria no mesmo problema.

Referências Bibliográficas

1 BRANQUINHO, João, MURCHO, Desidério e GOMES, Nelson (eds.). **Enciclopédia de Termos Lógico Filosóficos**. São Paulo: Martins Fontes, 2006. (Artigos sobre o princípio de bivalência, sobre o princípio de não-

contradição, sobre o princípio do terceiro excluído, sobre lógicas paraconsistentes, sobre lógica intuicionista, entre outros.)

COPI, Irwing. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

KNEALE, William e KNEALE, Martha. **O Desenvolvimento da Lógica**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

TUGENDHAT, Ernst e WOLF, Ursula. **Propedêutica Lógico-Semântica**. Petrópolis: Vozes, 2005.

Língua estrangeira

KLEENE, Stephen Cole. **Mathematical Logic**. Dover, 2002.

MENDELSON, Elliott. **Introduction to Mathematical Logic**. Chapman & Hall, 1997.

Leitura avançada

FREGE, Gottlob. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. São Paulo: Cultrix, 1978.

TARSKI, Alfred. **A Concepção Semântica da Verdade** – textos clássicos de Tarski. São Paulo: Editora da Unesp, 2007.